RESOLUCION DE CONSEJO DE COMISIÓN ORGANIZADORA N° 640-2024-CCO-UNJ

Jaén, 20 de diciembre de 2024.

VISTOS:
La Carta N° 02-2024/UNJ/DIITT/ERC, de fecha 11 de diciembre de 2024, emitido por el Docente Mg. Emmy Román Castillo, Oficio N° 227-2024-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 12 de diciembre de 2024, emitido por el Director de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, Oficio N° 1597-2024-VPI-CO-UNJ, de fecha 13 de diciembre 2024, emitido por la Vicepresidenta de Investigación, el Acuerdo N° 148-2024-SO-CCO-UNJ, de Sesión Ordinaria de Consejo de Comisión Organizadora de fecha 19 de diciembre de 2024, y;

CONSIDERANDO:
Que, conforme al 4to párrafo del art. 18°, de la Constitución Política del Estado, concordante con el art. 8°, de la Ley N° 30220-Ley Universitaria, así como con el Art. 6° del Estatuto de la Universidad Nacional de Jaén, el Estado reconoce la autonomía Universitaria en su régimen normativo, de gobierno, académico, investigación administrativo y económico. Concordante con el artículo 1°, de la Ley N° 31520, Ley que establece la autonomía y la institucionalidad de las universidades peruanas;

Que, el Sr. Presidente de la Comisión Organizadora de la Universidad Nacional de Jaén, es el personero y representante legal de la Universidad conforme a lo dispuesto por la Ley Universitaria N° 30220, tiene a su cargo y a Dedicación Exclusiva la Dirección, Conducción y Gestión del Gobierno Universitario en todos sus ámbitos. Y de acuerdo al Numeral 6.1.5, literal d) de la Norma Técnica "Disposiciones para la constitución y funcionamiento de las Comisiones Organizadoras de las Universidades Públicas en proceso de Constitución", aprobado mediante Resolución Viceministerial N° 244-2021-MINEDU, modificado por Resolución Viceministerial N° 055-2022-MINEDU, son funciones del Presidente de la Comisión Organizadora, Emitir resoluciones en los ámbitos de su competencia;

Que, conforme al artículo 6° del Estatuto de la Universidad Nacional de Jaén, en razón a su naturaleza y fines, la Universidad Nacional de Jaén, se rige por el principio de autonomía universitaria que sustenta el autogobierno, la autogestión, la autorregulación y se ejerce conforme a lo establecido en la Constitución Política de nuestro Estado, la Ley Universitaria, el presente Estatuto y normas aplicables a la materia;

Que, mediante numeral 73.3 del artículo 73° del Decreto Supremo N° 004-2019-JUS, que aprueba el Texto Único Ordenado de la Ley N° 27444, Ley del Procedimiento Administrativo General, señala "Cada Entidad es competente para realizar tareas materiales necesarias para el eficiente cumplimiento de su misión y objetivos";

Que, mediante Carta N° 02-2024/UNJ/DIITT/ERC, de fecha 11 de diciembre de 2024, emitido por el Docente Mg. Emmy Román Castillo, solicita al Director de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, se emita resolución de aprobación de las Separatas denominadas "Separata de Derivadas con Enfoque Ingenieril" y "Separata de Métodos Numéricos con Enfoque

Ingenieril - Teoría de Errores y Solución Numérica de una Ecuación Algebraica no Lineal de una Variable" que tienen como autores a los docentes: Mg. Enny Román Castillo y Mg. Frans Fuentes Maza;

Que, mediante Oficio N° 227-2024-UNJ/VPI-DIITT, de fecha 12 de diciembre de 2024, emitido por el Director de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, solicita a la Vicepresidenta de Investigación tramitar la emisión del acto resolutivo de las Separatas denominadas "Separata de Derivadas con Enfoque Ingenieril" y "Separata de Métodos Numéricos con Enfoque Ingenieril - Teoría de Errores y Solución Numérica de una Ecuación Algebraica no Lineal de una Variable" que tienen como autores a los docentes: Mg. Enny Román Castillo y Mg. Frans Fuentes Maza;

Que, mediante el Oficio N° 1597-2024-VPI-CO-UNJ, de fecha 13 de diciembre de 2024, emitido por la Vicepresidenta de Investigación, remite al Presidente de la Comisión Organizadora de la Universidad Nacional de Jaén, la solicitud del Director de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica, con el fin de que se considere en Sesión de Comisión Organizadora y se emita acto resolutivo de las Separatas denominadas "Separata de Derivadas con Enfoque Ingenieril" y "Separata de Métodos Numéricos con Enfoque Ingenieril - Teoría de Errores y Solución Numérica de una Ecuación Algebraica no Lineal de una Variable" que tienen como autores a los docentes: Mg. Enny Román Castillo y Mg. Frans Fuentes Maza;

Que, el pleno del Consejo de Comisión Organizadora UNJ, en Sesión Ordinaria, de fecha 19 de diciembre de 2024, emite el siguiente: Acuerdo N° 148-2024-SO-CCO-UNJ por UNANIMIDAD, APROBAR mediante acto resolutivo las Separatas denominadas: "Separata de Derivadas con Enfoque Ingenieril" y "Separata de Métodos Numéricos con Enfoque Ingenieril - Teoría de Errores y Solución Numérica de una Ecuación Algebraica no Lineal de una Variable" que tienen como autores a los docentes: Mg. Enny Román Castillo y Mg. Frans Fuentes Maza;

En uso de las facultades y atribuciones conferidas por el art. 18°, de la Constitución Política del Perú, la Ley N° 30220-Ley Universitaria, a las "Disposiciones para la Constitución y funcionamiento de las Comisiones Organizadoras de las Universidades Públicas en proceso de Constitución", aprobada mediante RVM N° 244-2021-MINEDU, modificada con RVM N° 055-2022-MINEDU y RVM N° 053-2023-MINEDU, el Estatuto de la Universidad Nacional, aprobado mediante Resolución N° 304-2020-CO-UNJ, de fecha 29 de setiembre de 2020, y;

SE RESUELVE:

ARTICULO PRIMERO.- APROBAR las Separatas denominadas: **"Separata de Derivadas con Enfoque Ingenieril"** y **"Separata de Métodos Numéricos con Enfoque Ingenieril - Teoría de Errores y Solución Numérica de una Ecuación Algebraica no Lineal de una Variable"** de la Universidad Nacional de Jaén, las mismas que en anexo forma parte integrante de la presente Resolución, cuyos autores son los siguientes docentes:

- Mg. Enny Román Castillo
- Mg. Frans Fuentes Maza

ARTICULO SEGUNDO.- ENCARGAR a la Vicepresidenta de Investigación de la Universidad Nacional de Jaén realizar las acciones correspondientes a fin de dar cumplimiento a lo señalado en el artículo primero de la presente Resolución.

ARTÍCULO TERCERO.- NOTIFICAR la presente Resolución a las instancias Administrativas y Académicas correspondientes para su conocimiento y fines.

ARTÍCULO CUARTO.- DISPONER LA PUBLICACIÓN en el Portal Web Institucional de la Universidad Nacional de Jaén www.unj.edu.pe

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y CÚMPLASE.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
Abg. Braian Alejandro Max Zegarra
SECRETARIO GENERAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
COMISIÓN ORGANIZADORA
Dr. Severino Apolinar Risco Zapata
PRESIDENTE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

COMISIÓN ORGANIZADORA

VICEPRESIDENCIA ACADÉMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE JAÉN

SEPARATA DE MÉTODOS NUMÉRICOS CON ENFOQUE INGENIERIL

TEORÍA DE ERRORES Y SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA NO LINEAL DE UNA VARIABLE

Autores:

Mg. Enny Román Castillo

Mg. Frans Fuentes Maza

JAÉN, SETIEMBRE DEL 2024

83

NOMBRE DEL TRABAJO

Separata Derivadas.pdf

AUTOR

Román Castillo - Fuentes Maza

RECUENTO DE PALABRAS

8368 Words

RECUENTO DE CARACTERES

37018 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

38 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.2MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 7, 2024 8:16 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 7, 2024 8:17 PM GMT-5

9% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 9% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 15 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente

NOMBRE DEL TRABAJO

Separata Métodos Numericos.pdf

AUTOR

Román Castillo-Fuentes Maza

RECUENTO DE PALABRAS

5717 Words

RECUENTO DE CARACTERES

25882 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

35 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.1MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 7, 2024 7:46 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 7, 2024 7:47 PM GMT-5

8% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 8% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 15 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado

INFORME N° 007-2024- UNF/TJJA

A: :Dr. Juan Manuel Garay Román
Dirección de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica

DE : Mg. Teresa Juliana Jara Alarcón
Docente adscrito al Departamento Académico de Matemática y Estadística - UNF

ASUNTO : INFORME DE REVSIÓN DE PARES DE SEPARTAS ACADÉMICAS

CARTA : N°002-2024-UNJ/VPI-DIITT

FECHA : Sullana, 28 de noviembre del 2024.

De mi especial consideración:

Tengo a bien dirigirme a usted con la finalidad de hacerle llegar mi cordial saludo y al mismo tiempo remitirle el Informe de revisión de pares de las separatas adjuntadas, que a continuación se detalla.

1. Introducción

El presente informe detalla la revisión realizada a las separatas tituladas: "Separata de derivadas con enfoque ingenieril" y "Separata de métodos numéricos con enfoque ingenieril" con el propósito de evaluar su calidad académica, coherencia estructural y pertinencia respecto a los temas abordados. esta revisión se efectúa siguiendo estándares de rigor académico, claridad pedagógica y relevancia de los contenidos para el público.

2. Criterios de evaluación y hallazgos

A. Estructura Lógica y Facilitadora del Aprendizaje

- La separata presenta una estructura coherente y bien organizada, que facilita la progresión del aprendizaje al presentar los contenidos de manera secuencial y conectada.

- Los temas están distribuidos de forma clara, permitiendo una fácil comprensión y asimilación de la información por parte de los estudiantes, promoviendo la retención de conceptos clave.

B. Actualización y Respaldo de los Conceptos Presentados

- Los conceptos presentados están alineados con los avances más recientes en la disciplina, asegurando que el contenido sea pertinente y relevante.
- Toda la información está respaldada por referencias bibliográficas actuales, confiables y apropiadas, demostrando un rigor académico y una base sólida de conocimientos.

C. Claridad, Concisión y Accesibilidad del Lenguaje

- El lenguaje utilizado es preciso, claro y directo, evitando tecnicismos innecesarios y adaptándose al nivel de conocimiento de los estudiantes o interesados.
- La terminología es apropiada y el estilo de redacción asegura que el contenido sea fácilmente comprensible, promoviendo la comprensión inmediata de los conceptos.

D. Calidad y Relevancia de Gráficos y Diagramas

- Los gráficos, tablas e ilustraciones utilizados son de alta calidad y están cuidadosamente seleccionados para complementar y clarificar el contenido textual.
- Cada recurso visual es relevante y contribuye de manera significativa a la comprensión de los temas tratados, facilitando la visualización de conceptos complejos y mejorando el proceso de aprendizaje.

E. Adecuación y Diversidad de Fuentes Bibliográficas

- Las fuentes bibliográficas empleadas son de alta calidad, actualizadas y relevantes para los temas tratados, cumpliendo con los estándares académicos.

- Se ha realizado un uso adecuado de diversas fuentes, garantizando que las citas sean pertinentes y correctamente referenciadas, siguiendo las normativas de citación correspondientes.

3. Conclusiones

Las separatas han sido evaluadas minuciosamente y cumplen con los rigurosos estándares académicos y pedagógicos requeridos. El contenido está bien estructurado, es claro y relevante, y está alineado con los objetivos educativos establecidos. Además, se ha verificado que las separatas facilitan el proceso de aprendizaje, al proporcionar información comprensible y adecuada para los estudiantes. Tras una revisión exhaustiva, se concluye que el material está completamente apto para su aceptación, dado que cumple con los criterios de calidad y efectividad exigidos.

Es todo cuanto tengo que informarle para los fines que estime conveniente.

Atentamente

Mg. Teresa Juliana Jara Alarcón
DOCENTE UNF

"Año del Bicentenario, de la consolidación de nuestra Independencia, y de la Conmemoración de las heroicas batallas de Junín y Ayacucho"

Chota, 04 de diciembre de 2024

INFORME N°. 10-2024-UNACH-EBC.

DEL : **Dr. EDIN BECERRA CELIZ**
Docente Ordinario del Departamento Académico de Estudios Generales - UNACH.

AL : **Dr. Juan Manuel Garay Román**
Dirección de Investigación, Innovación y Transferencia Tecnológica.

ASUNTO : **Informe de revisión de separatas académicas.**

REFERENCIA : **CARTA N°003-2024-UNJ/VPI-DIITT**

De mi especial consideración:

Tengo a bien dirigirme a usted con la finalidad de hacerle llegar mi cordial saludo y al mismo tiempo remitirle el informe de revisión de separatas adjuntadas, que a continuación se detalla.

1. **Introducción**

El presente informe detalla la revisión realizada a las separatas tituladas: **"Separata de derivadas con enfoque ingenieril"** y la **"Separata de métodos numéricos con enfoque ingenieril".** Este informe tiene como objetivo evaluar la calidad académica, la coherencia estructural y la pertinencia de los temas abordados en dichas separatas. La revisión se lleva a cabo siguiendo estándares de rigor académico, claridad pedagógica y relevancia de los contenidos para el público objetivo.

2. **Criterios de evaluación y hallazgos**

   a) **Estructura Lógica y Facilitadora del Aprendizaje**

   - La separata presenta una estructura coherente y bien organizada, que facilita el aprendizaje al presentar los contenidos de manera secuencial y conectada.
   - Los temas están distribuidos de forma clara, permitiendo una fácil comprensión y asimilación de la información por parte de los estudiantes.

   b) **Actualización y Respaldo de los Conceptos Presentados**

   - Los conceptos abordados están alineados con las disciplinas correspondientes, asegurando que el contenido sea pertinente y relevante.

77

c) **Claridad, Concisión y Accesibilidad del Lenguaje**

- El lenguaje utilizado es preciso, claro y directo, evitando tecnicismos innecesarios y adaptándose al nivel de conocimiento de los estudiantes o interesados.
- La terminología es adecuada y el estilo de redacción, basado en conceptos matemáticos, garantiza que el contenido sea fácilmente comprensible, promoviendo una comprensión inmediata.

d) **Calidad y Relevancia de Gráficos y Diagramas**

- Los gráficos utilizados son coherentes con las soluciones propuestas en cada problema y han sido seleccionados cuidadosamente para complementar y clarificar el contenido.
- Cada recurso visual es relevante y contribuye significativamente a la comprensión de los temas tratados, facilitando la visualización de conceptos complejos y mejorando el proceso de aprendizaje.

e) **Adecuación y Diversidad de Fuentes Bibliográficas**

- Las fuentes bibliográficas empleadas son relevantes para cada separata.
- Se ha realizado un uso adecuado de diversas fuentes, garantizando que las citas sean pertinentes y correctamente referenciadas, conforme a las normativas de citación correspondientes.

3. Conclusiones

Las separatas han sido evaluadas y cumplen con los estándares académicos y pedagógicos requeridos. El contenido está bien estructurado, es claro y relevante, y está alineado con los objetivos educativos establecidos. Además, se ha verificado que las separatas facilitan el proceso de aprendizaje al proporcionar información comprensible y adecuada para los estudiantes. Tras la revisión de ambas separatas, se concluye que el material es completamente apto para su aceptación.

Es todo cuanto tengo que informarle para los fines que estime conveniente.

Atentamente,

Dr. Edin Becerra Celiz.
Docente Ordinario del Departamento
Académico de Estudios Generales
Universidad Nacional Autónoma de Chota

I. PRESENTACION

Este trabajo académico denominado **separata de métodos numéricos con enfoque ingenieril** se ha desarrollado con el fin de facilitar la mejor comprensión sobre los métodos numéricos donde se abordaremos la teoría de errores en métodos numéricos y su aplicación a la solución de ecuaciones algebraicas no lineales de una variable desde un enfoque ingenieril. exploraremos cómo los errores, tanto truncamiento como redondeo, afectan la precisión de los métodos numéricos y cómo minimizarlos para obtener resultados fiables, seguido nos centraremos en técnicas para resolver ecuaciones algebraicas no lineales, como el método de bisección y el método de Newton-Raphson, explicando sus fundamentos teóricos, criterios de convergencia y aplicaciones prácticas. Es importante realizar una adecuada gestión de errores y selección de métodos para mejorar la exactitud y eficiencia en la resolución de problemas reales en ingeniería, proporcionando una visión integral de cómo los ingenieros pueden aplicar estos conocimientos para optimizar sus soluciones numéricas.

Invitamos a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Jaén a revisar este material académico, pues será muy útil en su formación profesional de pregrado.

Atte. Los autores

II. INTRODUCCIÓN

En esta separata, nos centraremos en dos aspectos esenciales de los métodos numéricos con un enfoque ingenieril: la teoría de errores y la solución numérica de ecuaciones algebraicas no lineales de una variable. abordaremos la teoría de errores, que explora las fuentes y tipos de errores, como los errores de truncamiento y de redondeo, y cómo estos afectan la precisión y la confiabilidad de los resultados obtenidos mediante métodos numéricos. Esta sección es crucial para entender cómo gestionar y minimizar estos errores en aplicaciones prácticas, nos enfocaremos en la solución numérica de ecuaciones algebraicas no lineales, un problema común en la ingeniería que frecuentemente requiere métodos iterativos para encontrar soluciones aproximadas. Examinaremos técnicas como el método de bisección y el método de Newton-Raphson, detallando sus principios teóricos, ventajas, desventajas y aplicaciones típicas en el contexto ingenieril.

En resumen, esta separata proporcionará el fundamento necesario para aplicar estos métodos de manera efectiva en la resolución de problemas reales en ingeniería, destacando la importancia de una adecuada comprensión de los errores y de la selección del método adecuado.

ÍNDICE

III. TEORIA DE ERRORES.

3.1. APROXIMACIÓN Y ERRORES DE REDONDEO.

3.1.1. CIFRAS CIENTÍFICAS.

Instrumentos de medición:

Velocímetro: Mide la rapidez promedio del vehículo, y solo se toma en cuenta hasta el tercer dígito; por lo tanto, no tiene sentido registrar 48,8642138 km/h.

Odómetro: Registra la distancia total o parcial recorrida, considerando solo hasta seis dígitos, como por ejemplo 87,324.5 km durante su uso.

Sea N un número real

0, 00001845

0, 0001845 $\longrightarrow \}$ *Tiene cuatro cifras significativas.*

0, 001845

El número real N=45300 puede tener 3, 4 o 5 cifras significativas, dependiendo de cómo se exprese en notación científica.

$4.53x10^4$:

$4.530x10^4$:

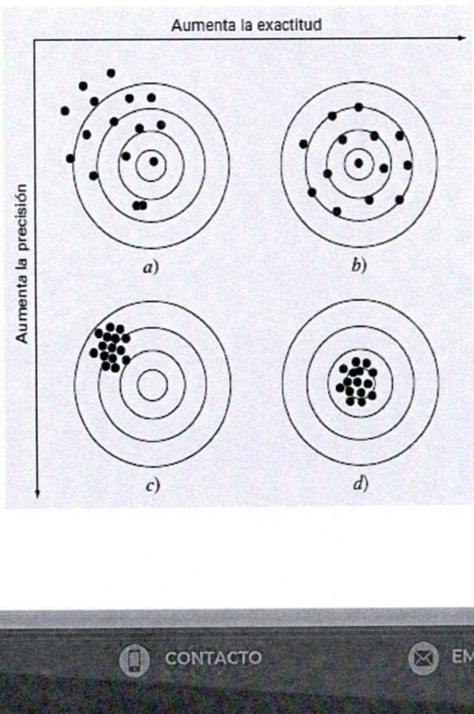
$4.5300x10^4$:

Observación: Los ceros (0) no siempre son cifras significativas.

3.1.2. EXACTITUD Y PRECISIÓN.

Exactitud: indica qué tan próximo está el valor calculado al valor verdadero o correcto.

Precisión: describe cuán próximos están entre sí los valores calculados o medidos en repetidas ocasiones.



3.1.3. DEFINICIÓN DE ERROR.

Los errores en cálculos y mediciones pueden evaluarse en términos de exactitud y precisión. Los errores numéricos se originan al utilizar aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.

$$Valor\ Verdadero = Valor\ aproximado + Error$$

- $E_a = Error\ Absoluto = |Valor\ Exacto - Valor\ Calculado|$
- $E_r = Error\ \mathrm{Re}lativo = \left|\dfrac{Error\ Absoluto}{Valor\ Exacto}\right| = \left|\dfrac{Error\ Verdadero}{Valor\ Verdadero}\right|$
- $E_r = Error\ \mathrm{Re}lativo = 2\dfrac{|Error\ Absoluto|}{|Valor\ Exacto| + |Valor\ Calculado|}$
- $E_a x100\% = Error\ Absoluto\ porcentual$
- $E_r x100\% = Error\ \mathrm{Re}lativo\ Porcentual$

Sea la ecuación de segundo grado.

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow Valor\ Exacto$$

$$x = \pm 1,732 \rightarrow ValorAproximado$$

Ejemplo 01 (Punto Flotante). ¿Qué sucede si se reemplaza el número 0,12345678 por el número de punto flotante? 0,123456.?. ¿Calcular el error absoluto y relativo?

Solución.

✓ Calculando el error absoluto.

$$\begin{aligned} E_a &= |0,123456 - 0,12345678| \\ &= 0,00000078 \\ &= 7,8x10^{-7} \\ &= 78x10^{-8} \end{aligned}$$

✓ Calculando el error relativo.

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{E_a}{|Valor\ exacto|} = \frac{0,00000078}{0,123456} \\ &= \frac{78}{123456} \\ &= 631,80404354x10^{-6} \end{aligned}$$

✓ Calculando el error absoluto porcentual.

$$E_a x100\% = 78x10^{-6}$$

✓ Calculando el error relativo porcentual.

$$E_r x100\% = 631,80404354x10^{-4}$$

Ejemplo 02: Supongamos que se mide la longitud de un puente y de un remache, obteniendo 9999 cm y 9 cm, correspondientemente. Si los datos auténticos son 10000 cm y 10 cm, calcule: a) el error verdadero y b) el error relativo porcentual verdadero para cada medición.

Solución

✓ Calculando el error absoluto.

En el puente: $E_a = |10\,000 - 9999| = 1$

En el remache: $E_a = |10 - 9| = 1$

✓ Calculando el error relativo.

En el puente:

$$E_r = \frac{E_a}{|Valor\ exacto|} = \frac{1}{10\,000} = 0.0001$$

$$E_r\% = 0.01\%$$

En el remache:

$$E_r = \frac{E_a}{|Valor\ exacto|} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$E_r\% = 10\%$$

3.1.4. MÁXIMA COTA DE ERROR DE UNA RAÍZ APROXIMADA.

Se dice que "r" es la raíz de la ecuación f(x)=0, aproximadamente con n- cifras decimales exactas (CDE) si se cumple que.

$$C_r = \left|r^x - r\right| \leq 0.5x10^{-n} = \frac{1}{2x10^n}$$

3.1.5. REDONDEO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Sea N=1,0575051615

N (REDONDEO)	RESULTA
1CDE	1,1

2 CDE	1,06
3CDE	1,058
4CDE	1,0575
5CDE	1,05751
6CDE	1,057505
7CDE	1,0575052
8CDE	1,05750516

Ejemplo 03: Con cinco cifras significativas (redondear)

0,4678323=0,46783

1,3256217= 1,32562

3,163231501 = 3,16323

4,23216500= 4,23217

5,23211500 = 5,23212

Ejemplo 04 : Según el polinomio $f(x)=x^3-7x^2+8x+0.35$ en x=1.37. Utilice aritmética con precisión de 3 dígitos y corte. Calcule el error relativo porcentual.

Solución.

$f(1.37)=0.743053$

$f(1.37)=0.743$, con tres decímales

IV. SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES DE UNA VARIABLE.

4.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Definición 1: Sea f una función definida en un conjunto X, de números reales, se dice que f tiene como **límite** a L en x_0, denotado por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=L$.

$$Si\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0, Tal\ que\ \delta \neq 0\ Siempre\ que\ x \in X\ y\ 0<|x-x_0|<\delta \quad Entonces\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

Definición 2: : Sea f una función definida en un conjunto X, de número reales y $x_0 \in X$, se dice que f **es continua** en x_0 sí.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),\ Es\ decir \begin{cases} f(x_0)=L \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=L \end{cases}$$

Definición 3: Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, una sucesión infinita de números reales o complejos. Se dice que la sucesión convergente al número x (llamado limite)

$$Si\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) > 0, Tq'n > N(\varepsilon) \rightarrow < \left| x_n - x \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = x,\ \ o\, x_n \rightarrow x, cuando\, n \rightarrow \infty, significa \left\{ X_n \right\}_{n\to\infty}^{\infty} converge\, a\, x$$

Ejemplo: sea la sucesión $\left\{ x_n \right\} = \dfrac{1}{n}, n \in N$

Teorema 1: (Relación de continuidad y convergencia)

Si f es una función definida en un conjunto X de números reales $x_0 \in X$ entonces los enunciados son equivalentes.

i. f es continua en x_0

ii. $Si\ \left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}, es\, cualquier\, sucesion\, X\, convergente\, a\, x_0, Entonces \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Observación 1: Si f es una función definida en un intervalo abierto $< a,b >$ que contiene a x_0 se dice que f es diferenciable en x_0 sí.

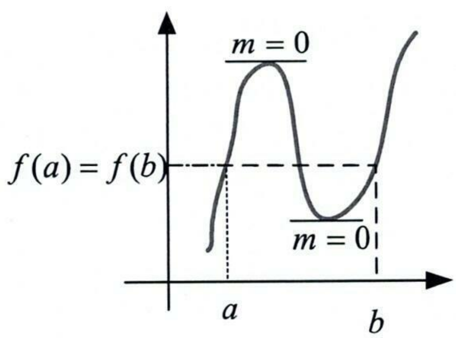
$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists(existe)$; Cuando este límite existe se denota por $f'(x_0)$

Se conoce como la derivada de f en el punto x_0

Se dice que f es una función diferenciable en $< a,b >$ si la función tiene derivada en $\left[a,b \right]$

Teorema 2: (Teorema de Rolle)

Sea $f \in C\left[a,b \right]$ y es diferenciable en $< a,b >$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in < a,b >\ Tal\ que\ f'(c) = 0$

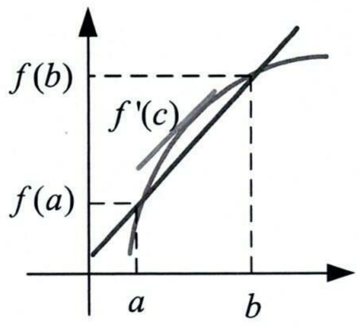


Teorema 3: (Teorema del Valor Medio)

Sea $f \in C[a,b]$ y es diferenciable en $< a,b >$.

Entonces $\exists c \in < a,b > Tal\ que$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Teorema 4 (Teorema Del Valor Extremo)

Sea $f \in C[a,b]$, entonces existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ y tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, $\forall x \in [a,b]$. Si además, f es diferenciable en $< a,b >$ entonces los números $c_1\ y\, c_2$ ocurren ya sea en los extremos de $[a, b]$, o donde f' sea cero.

Teorema 5 (Teorema Del Valor Intermedio)

Sea $f \in C[a,b]$, y k es un número cualquiera entre $f(a)\ y\ f(b)$ entonces existe un $c \in < a, b >$ tal que $f(c) = k$

Teorema 6 (Teorema de Taylor)

Sea $f \in C^n[a,b]$, y f^{n+1} existe en $< a, b >$, sea $x_0 \in < a, b >$, $\forall x \in [a, b]$, existe $\varphi(x)$

Entre x_0 y x tal que : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ Donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\varphi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

Ejercicio 01: Sea $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$, demostrar que tiene una raíz en $< 0,1 >$

<u>Demostración por el absurdo</u>

Sea $c_1 < c_2, \exists c_1, c_2 \in < 0,1 > tal\ que$

$f(c_1) = f(c_2) = 0$ ….. por el teorema de Rolle

Siempre que $f'(c) = 0$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$

$f'(c) = 5c^4 + 3c^2 + 2 = 0\ (\rightarrow\leftarrow)$

Siempre que:

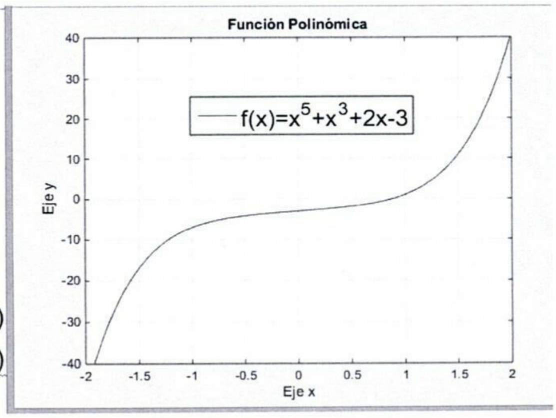
$$x^2 \geq 0, \forall x \in R$$
$$Si\ p \to q \cong Si \sim q \to \sim p$$

$$\begin{array}{r} 2 \geq 0 \\ 3c^2 \geq 0 \\ 5c^4 \geq 0 \\ \hline 2+3c^2+5c^4 \geq 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\exists c \in <0,1>$

Gráfico 2.1: programación en Matlab

```
x=-2:0.001:2;
y=x.^5+x.^3+2*x-3;
plot(x,y,'r')
grid
ylim([-40 40])
xlabel('Eje x')
ylabel('Eje y')
title('Función Polinómica')
legend('f(x)=x^5+x^3+2x-3')
```



Ejemplo 02: Ubicar la raíz de la ecuación $f(x)=2-x-\ln x=0$, en el intervalo de longitud menor $<0,4>$

<u>Solución.</u>

$$2-x-\ln x=0$$
$$f(x)=2-x-\ln x$$
$$f'(x)=-1-\frac{1}{x}, x \neq 0$$

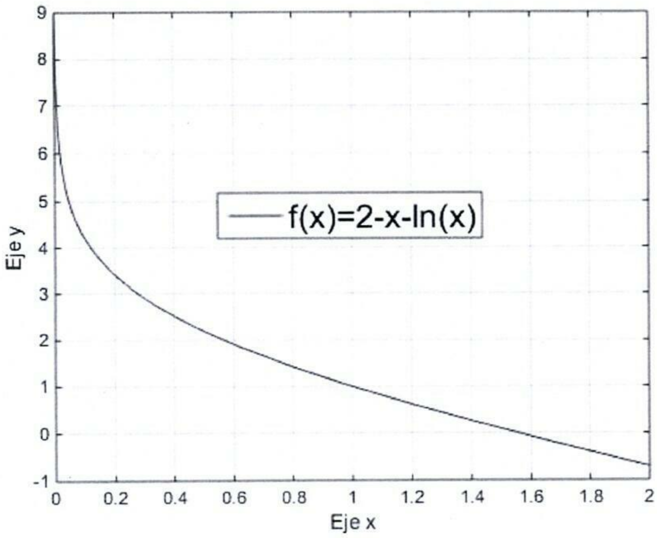
Analizaremos en $[1,2]$ y diferenciable en $<1,2>$

Entonces $\exists c \in <a,b> Tal\ que\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f(2)=-0,6931 \end{array}\right\} reemplazando\ f'(c)=\frac{-0,6931-1}{2-1}=-1,6931$$

Por lo tanto: $c=1,4430 \approx 1,55$

Gráfico 2.2: En Matlab



Ejemplo 03: Hallar la raíz real de $3x^3+2x-4=0$, en un intervalo de longitud menor $<0,\ 4>$, demuestre que existe una raíz única; $y=3x^3+2x-4$

<u>**Solución.**</u>

a) Hallando la raíz real.

$$\left.\begin{array}{l} Para: x=0 \rightarrow f(0)=-4 \\ \qquad\quad x=1 \rightarrow f(1)=1 \end{array}\right\} me\,basta\,tomar <0,1>$$

Analizaremos en el intervalo [0, 1]

$f \in C\left[0,1\right]$ y es diferenciable en $<0,1>$.

Entonces $\exists c \in <0,1> Tal\ que$

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \text{.... Por T.V.M}$$

$$9c^2+2=\frac{1-(-4)}{1-0}$$

$$9c^2=3 \rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$c=0,58$ *Se escoge la positiva*

Consideremos un intervalo $<0.5,\ 0.9>$

....

....

b) Demostración por el absurdo

Sea $c_1 < c_2, \exists c_1, c_2 \in <0,1> tal\ que\ f(c_1) = f(c_2) = 0$ ..... por el teorema de Rolle

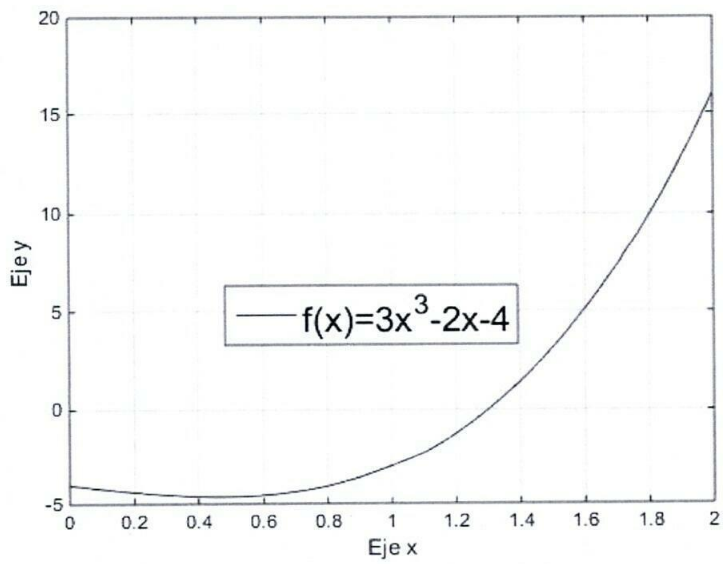
Siempre que $f'(c) = 0$, entonces $f'(c) = 9c^2 + 2 = 0$

Siempre que:

$$\begin{array}{l} x^2 \geq 0, \forall x \in R \\ Si\ p \to q \cong Si \sim q \to \sim p \end{array} \Bigg\} \to \begin{array}{c} 2 \geq 0 \\ 9c^2 \geq 0 \\ \hline 2 + 9c^2 \geq 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\exists c' \in <0.8, 0.99> tal\ que\ c' \in [0,1]$

Gráfico 2.3: En Matlab



Ejemplo 04: Hallar el polinomio de Taylor de grado "n", para $f(x) = e^x$, de $a = 0$.

Solución.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = e^x \to f(a) = e^a = e^0 = 1$$

$$f(x)=e^x \rightarrow f'(x)=e^x \rightarrow f'(0)=e^0=1$$
$$f''(x)=e^x \rightarrow f''(0)=e^0=1$$
$$f'''(x)=e^x \rightarrow f'''(0)=e^0=1$$
$$f^{iv}(x)=e^x \rightarrow f^{iv}(0)=e^0=1$$
$$\vdots$$
$$f^{n}(x)=e^x \rightarrow f^{n}(0)=e^0=1$$

Entonces el polinomio de Taylor se define por:

$$P_n(x)=1+1(x-0)+\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{1}{3!}(x-0)^3+\ldots+\frac{1}{n!}(x-0)^n$$
$$P_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n$$
$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

Ejemplo 05: Hallar el polinomio de Taylor de grado "n", para $f(x)=\ln(x+1), \quad a=0$.

Solución

$$f(x)=\ln(x+1) \rightarrow f(0)=\ln(0+1)=0$$
$$f(x)=\ln(x+1) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+1} \rightarrow f'(0)=\frac{1}{0+1}=1$$
$$f''(x)=\frac{-1}{x+1}=-1(x+1)^{-1} \rightarrow f''(0)=-1(0+1)^{-1}=-1$$
$$f'''(x)=1(x+1)^{-2} \rightarrow f'''(0)=1(0+1)^{-2}=1$$
$$f^{iv}(x)=-2(x+1)^{-3} \rightarrow f^{iv}(0)=-2(0+1)^{-3}=-2$$
$$f^{v}(x)=6(x+1)^{-4} \rightarrow f^{v}(0)=6(0+1)^{-4}=6$$
$$f^{vi}(x)=-24(x+1)^{-5} \rightarrow f^{vi}(0)=-24(0+1)^{-5}=-24$$
$$\vdots$$

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(x)=0+1(x-0)+\frac{-1}{2!}(x-0)^2+\frac{2}{3!}(x-0)^3+\frac{-6}{4!}(x-0)^4+\frac{24}{5!}(x-0)^5+\frac{-120}{6!}(x-0)^6+\ldots$$

$$P_n(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{2!.3}x^3-\frac{6}{3!.4}x^4+\frac{24}{4!.5}x^5-\frac{120}{5!.6}x^6+\ldots$$

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}x^i}{i!}$$

Observación 2: sea f una función continua en $[a,\, b]$ y $f(x)=0,$ $"r"$es una raíz de la ecuación entonces $f(r)=0$

4.2. MÉTODOS CERRADOS

4.2.1. MÉTODO DE BÚSQUEDA O MÉTODO AL AZAR.

Sea $f(x)=0$, donde f es continua en $[a,\, b]$

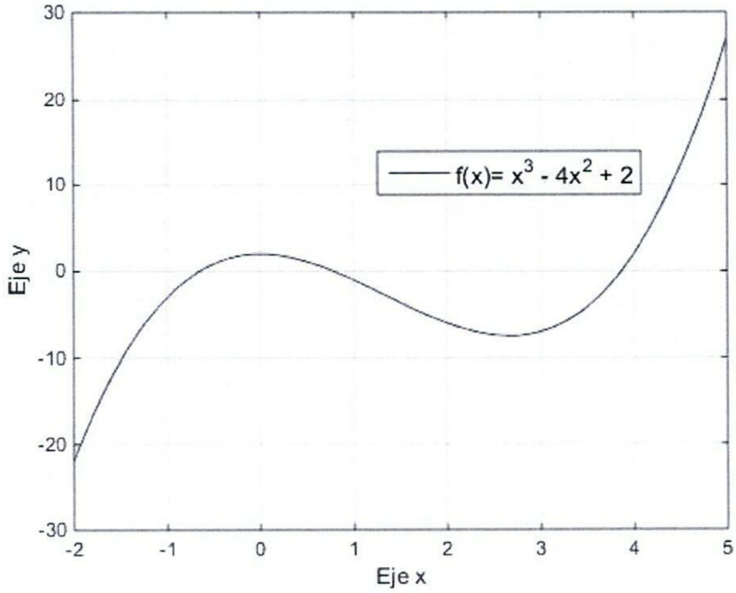
1. $f(a).f(b)<0 \rightarrow <a,\, b>$ contiene una raíz dada, en general un número impar de veces.
2. $f(a).f(b)>0 \rightarrow [a,\, b]$ No contiene raíces.
3. Si $f\,'(x)$, tiene un signo determinado (creciente o decreciente), en un intervalo dado y si además el signo de $f(a)$ es igual al signo $f(b)$ entonces $[a,\, b]$ hay una sola raíz. $f(x)=0$, y si el signo es igual (es decir no es creciente ni decreciente) con seguridad no hay ninguna raíz en un intervalo dado.

Ejemplo 01: Separar y hallar las raíces. $f(x)=x^3-4x^2+2$

Solución

Analizaremos para los intervalos $<-1,\, 0>;\ <0,\, 1>;\ <3,\, 4>$

Gráfico 2.4: En Matlab

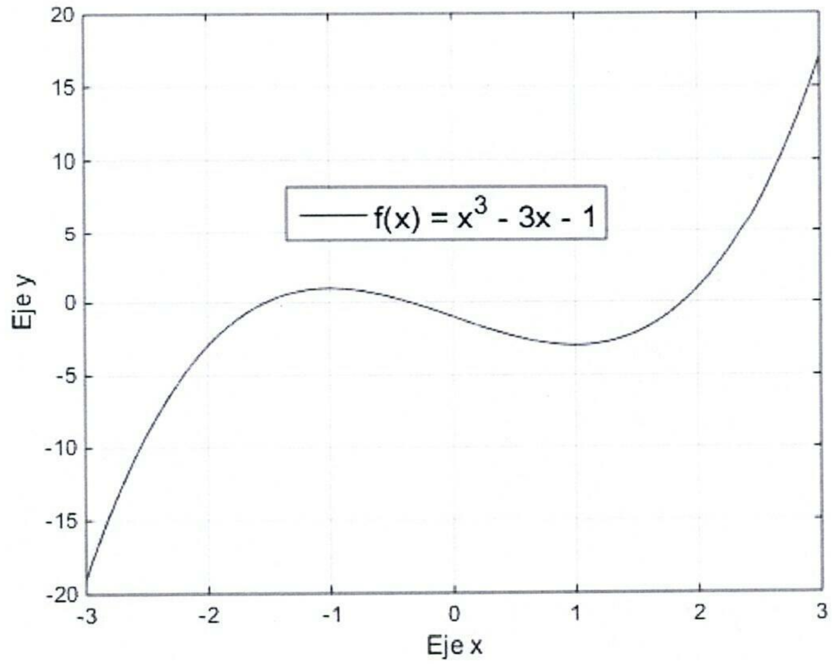


Ejemplo 02: Separar y hallar las raíces. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

<u>Solución</u>

Analizaremos para los intervalos $<-2, -1>$; $<-1, 0>$; $<1, 2>$

Gráfico 2.5: En Matlab



4.2.2. MÉTODO DE LOCALIZACIÓN

Sea $y = f(x)$, continua en $[a,b]$, donde al menos se encuentra a una raíz de $f(x) = 0$. El método consiste en lo siguiente

i. Descomponer la función dada en dos y de acuerdo a nuestra conveniencia:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$$

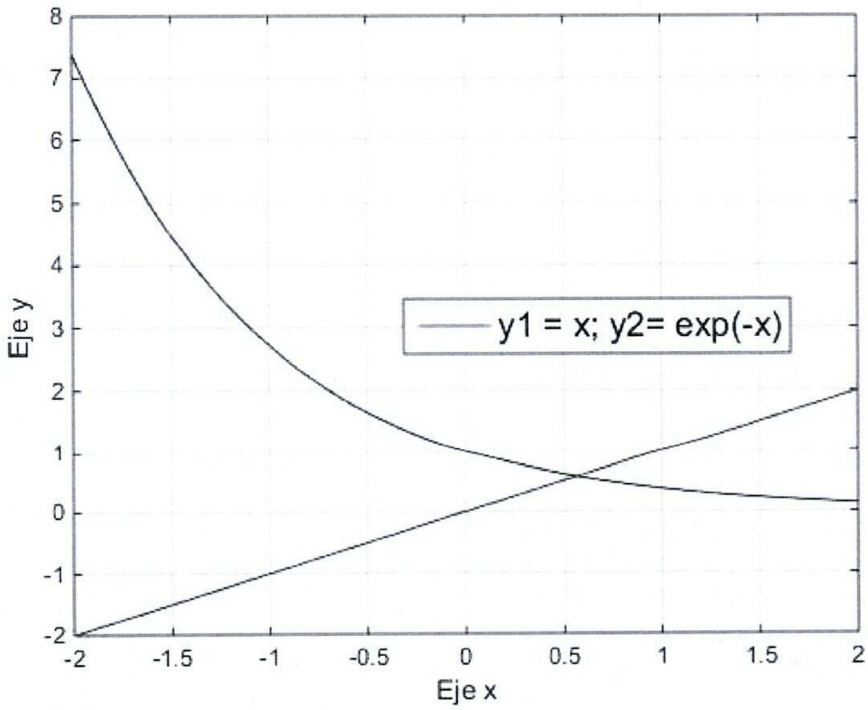
ii. Graficar las funciones descompuestas $f_1(x)\ y\ f_2(x)$

iii. La solución es donde se intersectan $f_1(x)\ y\ f_2(x)$

Ejemplo 03: Hallar la raíz en $x e^x - 1 = 0$

<u>**Solución**</u>

Gráfico 2.6: En Matlab



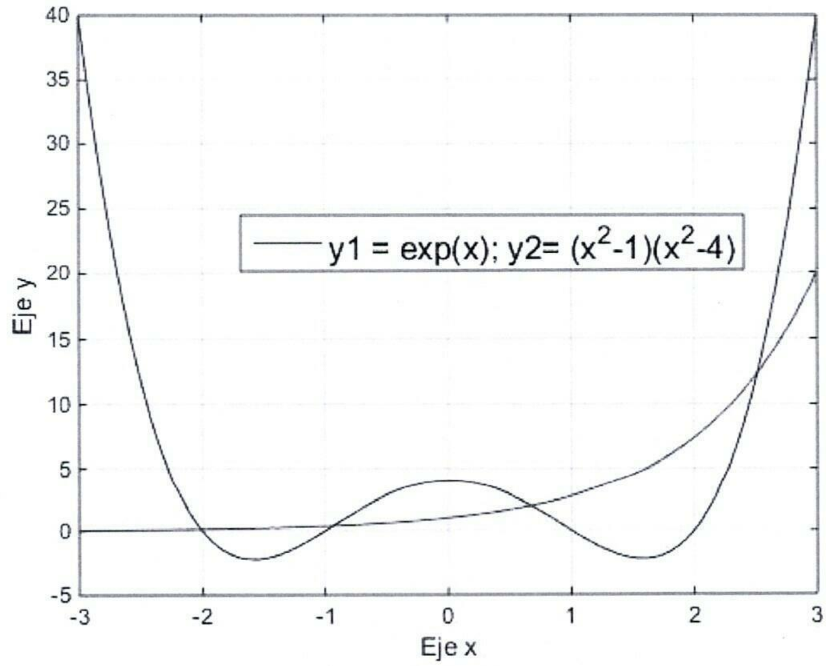
$$f(x) = 0$$
$$f(x) = xe^{x} - 1$$
$$xe^{x} - 1 = 0$$
$$xe^{x} = 1$$
$$x = \frac{1}{e^{x}}$$
$$x = e^{-x}$$

Por consiguiente, tenemos.

$f_1(x) = x;\quad f_2(x) = e^{-x}$ por tanto $c \in [0,1]$

Ejemplo 04: Localizar la raíz $e^{x} - (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

Solución.

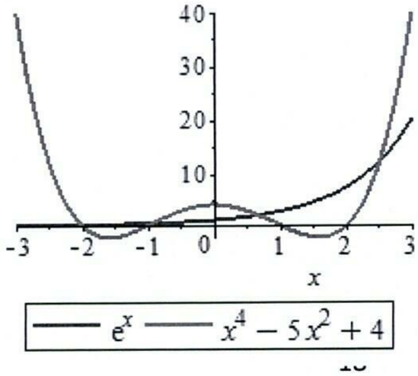


$$e^{x} - (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$
$$e^{x} = x^4 - 5x^2 + 4$$

Por consiguiente, tenemos.

$f_1(x) = e^{x};\quad f_2(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Por lo tanto, puedo tomar el intervalo



$$<-2.5,-1.5> \text{ ó } <-1.5,0.5> \text{ ó } <0,1>$$

Ejemplo 05: Hallar la raíz $3\ln(x)-x=0$

Solución

....
....
....

4.2.3. MÉTODO DE BISECCIÓN.

Sea $y=f(x)$, continua en $[a,b]$, en el que al menos exista una raíz "r" de $f(x)=0$. En $[a,b]$ si $f(a).f(b)<0$. El método consiste en lo siguiente.

i. Hallar $c=\dfrac{a+b}{2}$.

ii. Evaluamos $f(c)$

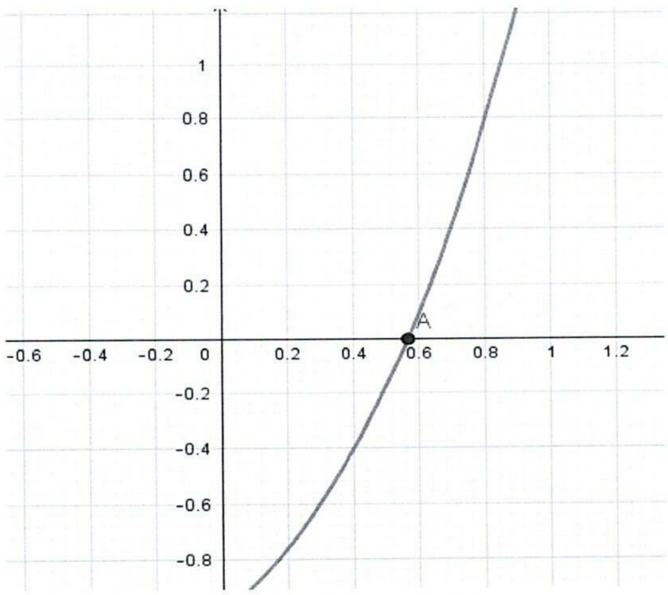
iii. Reemplazamos los puntos.

$$b=c \; si \; f(a).f(c)<0$$
$$a=c \; si \; f(c).f(b)>0$$

Nota: La raíz deseada se encuentra utilizando el método indicado, siguiendo el número y criterio establecidos.

Ejemplo 06: Hallar la raíz en $xe^x-1=0$ con una longitud menor de 0.05

Solución



Asumimos el intervalo $[0,1]$

$$f(x)=xe^{x}-1\rightarrow\begin{cases}f(0)=0\cdot e^{0}-1=-1\\ f(1)=1\cdot e^{1}-1=1.72\end{cases}\text{ como } f(0).f(1)<0\rightarrow\exists\, c_1=\frac{0+1}{2}=0.5$$

$f(0.5)=-0.176$, asumiendo $f(0.5)\cdot f(1)<0\rightarrow\exists\, c_2=\dfrac{0.5+1}{2}=0.75$

$f(0.75)=0.585$, asumiendo $f(0.5)\cdot f(0.75)<0\rightarrow\exists\, c_3=\dfrac{0.5+0.75}{2}=0.625$

$f(0.625)=0.168$, asumiendo $f(0.5)\cdot f(0.625)<0\rightarrow\exists\, c_4=\dfrac{0.5+0.625}{2}=0.563$

$\varepsilon=|c_4-c_3|=|0.563-0.625|=0.062>0.05=\tau$, por tanto, continuamos

$f(0.563)=-0.013$, asumiendo $f(0.563)\cdot f(0.625)<0\rightarrow\exists\, c_5=\dfrac{0.563+0.625}{2}=0.594$

$f(0.594)=0.076$, asumiendo $f(0.563)\cdot f(0.594)<0\rightarrow\exists\, c_6=\dfrac{0.563+0.594}{2}=0.579$

$\varepsilon=|c_6-c_5|=|0.579-0.594|=0.015<0.05=\tau$

Por lo tanto, la raíz buscada será: $c_6=0.579$

Usando tabla

Intervalo	a	b	c	$f(a)$	$f(c)$	Producto
$[0,1]$	0	1	0.5	-1	-0.176	+
$[0.5, 1]$	0.5	1	0.75	-0.76	0.588	-
$[0.5, 0.75]$	0.5	0.75	0.625			
$\vdots$						

Ejemplo 07: Hallar la raíz en $f(x)=e^{x}-sen(x)$. En $[-8,-4]$,

i. Encontrar un intervalo $[a_0,b_0]\subset[-8,-4]$

ii. Que la longitud del intervalo sea menor de 0.05

<u>Solución.</u>

Asumiremos $[-8,-6]$

....

4.2.4. MÉTODO DE REGULA FALSI. (Partes proporcionales o de posición falsa.)

Sea $f(x)=0$, donde f es continua en $[a,\ b]$ si $f(a)f(b)<0$ entonces $\exists c \in <a,\ b>$ tq'

$c=\dfrac{a.f(b)-b.f(a)}{f(b)-f(a)}$, Donde se remplaza

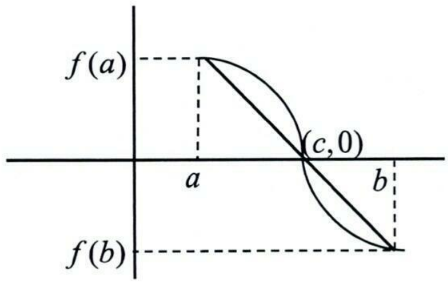
$$\begin{cases} b=c, si\ \ f(a).f(c)<0\ (A\cot acion\ \ por\, Derecha) \\ a=c, si\ \ f(c).f(b)>0\ (A\cot acion\ \ por\ \ Izquierda) \end{cases}$$

<u>Demostración</u>

La ecuación de la recta es

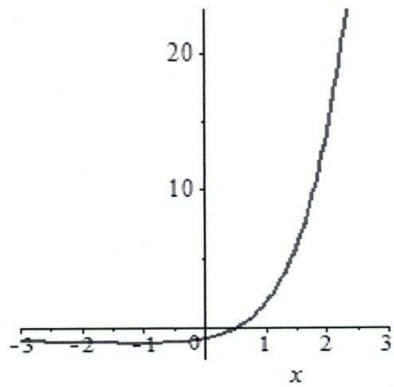
$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$m=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$



Ejemplo 08: Hallar la raíz de $xe^x-1=0$.con un error menor a 0.05

<u>Solución.</u>



$$f(x)=xe^x-1$$

x	0	1
$f(x)$	-1	1.7183

$x \in <0,1>$

$f(0).f(1)<0$

$$c=\frac{a.f(b)-b.f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c=\frac{0(1.71828)-1(-1)}{1+1.71828}=0.367881$$

i	a	b	c	$f(a)$	$f(c)$	Producto
1	0	1	0.36738	-1	-0.46854	+
2	0.36738	1	0.50331	-0.46854	-0.46854	+
3	0.50331	1				
4						
5						
6						

4.3. MÉTODOS ABIERTOS

4.3.1. MÉTODO DE ITERACIÓN DEL PUNTO FIJO. (o sustituciones sucesivas)

Sea $f(x)=0$ una ecuación, donde f es continua en $[a,\ b]$, si existe una raíz en $[a,b]$, entonces $f(a).f(b)<0$. El método consiste en lo siguiente.

i. Dado $f(x)=0$, despejamos de alguna manera un $x=g(x)$.

ii. El algoritmo a utilizar es $x_{n+1}=g(x_n)$

iii. Repetimos el procedimiento tantas veces como sea necesario para lograr la precisión deseada en la raíz y asegurar la convergencia del método. El criterio de convergencia es $|g'(x)|<1$, partiendo de un valor inicial x_0, $|g'(x)|<1$

Observación:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & |x_{n+1}-x_n| \\ b) & \dfrac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|} \end{array}\right\} Tolerancia\ de...$$

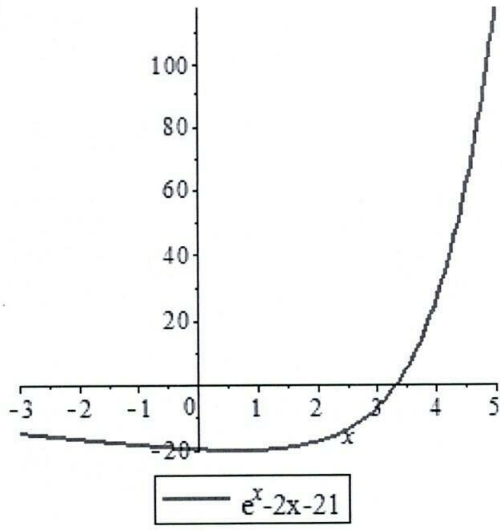
Ejemplo 01: Hallar una raíz de la ecuación $e^x-2x-21=0$; con un error de $1x10^{-6}$

Solución.

i. Método de la búsqueda.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	-	-	-	+	

Solución gráfica.



ii. Creando el algoritmo

$$e^x-21=2x \rightarrow x=\frac{e^x-21}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^x-21}{2}$$

$$x_{n+1}=\frac{e^{x_n}}{2}-\frac{21}{2}$$

iii. $g'(x)=\dfrac{e^x}{2},\quad x_0=3$

$$|g'(x)| = \left|\frac{e^3}{2}\right| = 10.04 > 1$$

No cumple con el paso (iii) volvemos a buscar.

ii. Buscando el algoritmo.

$$e^x = 21 + 2x \rightarrow \ln(e^x) = \ln(21 + 2x)$$
$$x = \ln(21 + 2x)$$
$$g(x) = \ln(21 + 2x)$$

iii. Derivando.

$$g'(x) = \frac{2}{2x + 21}, \quad x_0 = 3$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{2}{2(3) + 21}\right| = \frac{2}{27} < 1, \quad x_0 = 3$$

Entonces pasamos a utilizar el algoritmo

$$x_{n+1} = \ln(21 + 2x_n)$$

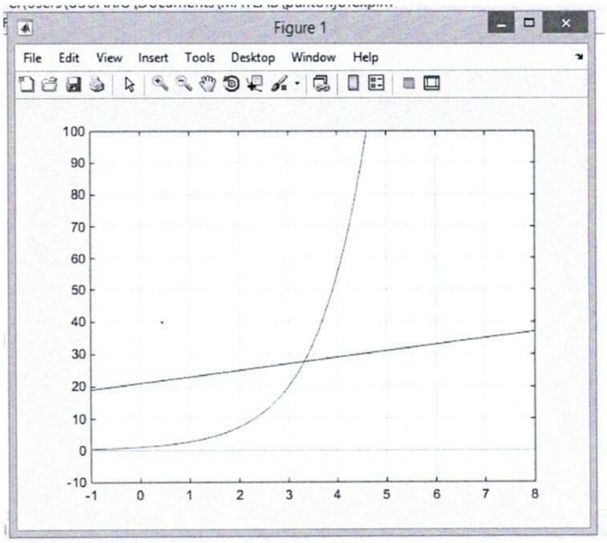
i	x_i	$g(x_i)$
0	3	3.295836866
1	3.295836866	3.317514051
2	3.317514051	3.319084102
3	3.319084102	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Utilizando software Matlab

Editor - C:\Users\USUARIO\Documents\MATLAB\puntofijofexp.m

NewtonRapsonfP.m | puntofijocosx.m | tailor cualquier.m | puntofijofexp.m

```
% punto fijo
% y=exp(x)-2x-21
x=-1:0.1:8;
y=exp(x);
z=21+2*x;
t=zeros(size(x));
plot(x,y)
axis([-1 8 -10 100])
hold on
plot(x,z)
plot(x,t)
grid
x0=3;
for i=1:10
    x=log(21+2*x0);
    f=abs(exp(x0)-2*x0-21);
    disp([x0,x,f])
    x0=x;
end
```

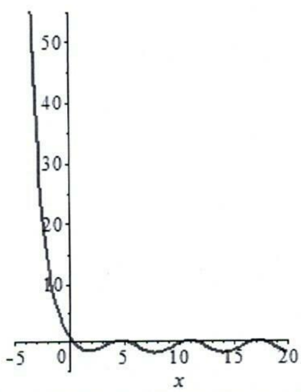


Command Window

```
>> puntofijofexp
    3.0000    3.2958    6.9145

    3.2958    3.3175    0.5917

    3.3175    3.3191    0.0434

    3.3191    3.3192    0.0031

    3.3192    3.3192    0.0002

    3.3192    3.3192    0.0000

    3.3192    3.3192    0.0000

    3.3192    3.3192    0.0000

    3.3192    3.3192    0.0000

    3.3192    3.3192    0.0000
```

Ejemplo 02: hallar una raíz de: $2e^{-x} - sen(x) = 0$ sugerencia en primer lugar separe las raíces por el método de la localización., con una tolerancia de $1x10^{-4}$

Solución.



$$2e^{-x} - sen(x) = 0 \rightarrow \ln(e^{-x}) = \ln(\frac{sen(x)}{2})$$

$$-x = \ln(\frac{sen(x)}{2})$$

$$x = -\ln(\frac{sen(x)}{2})$$

$$g(x) = -\ln(\frac{sen(x)}{2})$$

Analizando la derivada en el punto $x_0 = 2$

$$g'(x) = -\frac{\frac{\cos(x)}{2}}{\frac{sen(x)}{2}} = -cot(x)$$

$$Para\ x_0 = 2 \rightarrow |g'(x)| = |-cot(x)| = |-0.46| < 1$$

Entonces $x = -\ln(\frac{sen(x)}{2}) = \ln(\frac{2}{sen(x)})$

$$x_{n+1} = \ln(\frac{2}{sen(x_n)})$$

Ejemplo 03: encuentre la raíz real positiva de $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$, con una tolerancia de 10^{-4} para la variable x.

Solución.

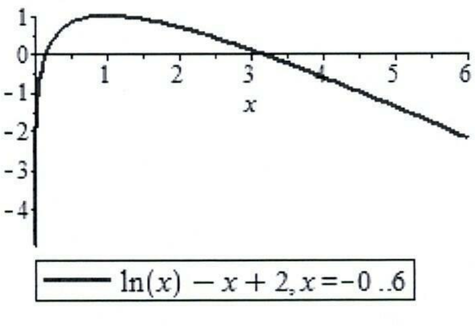
$$x = \ln(x) + 2$$

$$g(x) = \ln(x) + 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 3$$

$$|g'(3)| = \left|\frac{1}{3}\right| = |0,333| < 1$$

$$x_{k+1} = \ln(x_k)$$



4.3.2. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON.

Este método está basado en la serie de Taylor que se genera a partir de una raíz x_0 para la función $f(x)$. Donde se cumple que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Demostración

Sabemos que $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(x_0) = m$

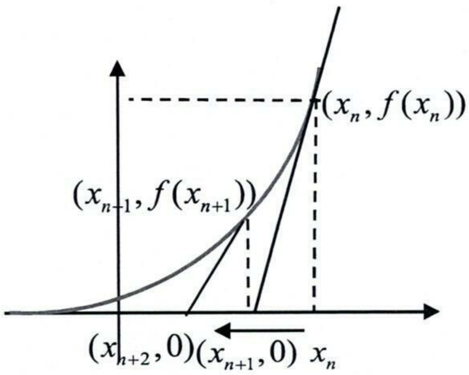
En el grafico se cumple q

$$m = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

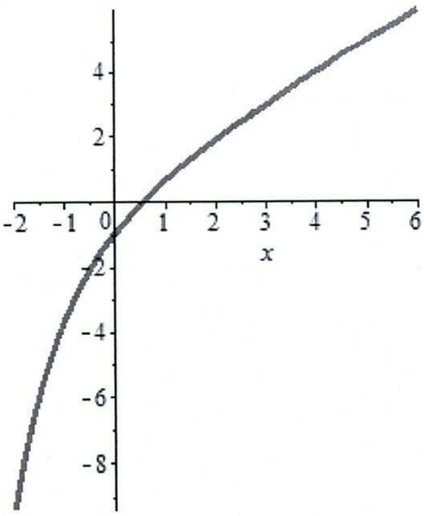
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Ejemplo 04: usando el método de las tangentes (Newton y Raphson). Hallar una raíz en $x - e^{-x} = 0$. Con una tolerancia de $1x10^{-6}$

Solución.

Sea $f(x) = x - e^{-x}$, aplicando el método de N-R



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x_n) = x_n - e^{-x_n}$$

$$f'(x_n) = 1 + e^{-x_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{1 + e^{-x_n}}, \; x_0 = 0$$

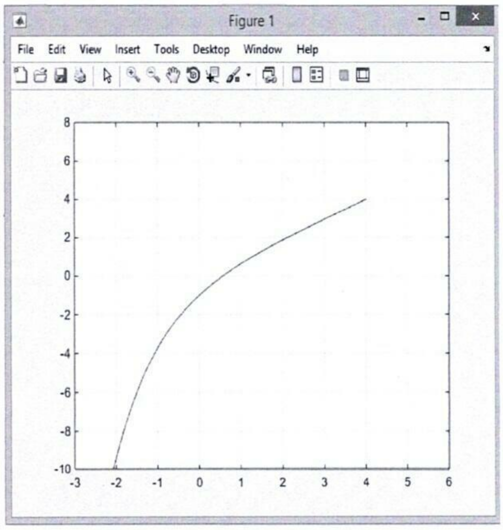
i	x_i	x_{i+1}
0	0	0,5
1		

Utilizando Software MatLab.

Editor - C:\Users\USUARIO\Documents\MATLAB\Newtonfexptri.m

NewtonRapsonfP.m | Newtonfexptri.m

```
%Newton y Raphson ftrigon y exp
x=-4:0.1:4;
y=x-exp(-x);
plot(x,y)
axis([-3 6 -10 8])
hold on
plot(x,y)
grid
format long
x0=0;
for i=1:5
    f=x0-exp(-x0);
    df=1+exp(-x0);
    ddf=-exp(-x0);
    x=x0-f/df;
    dist=abs(x-x0);
    dg=abs(1-(f*df*df-f*ddf)/df*df);
    disp([x,dist,dg])
    x0=x;
end
```



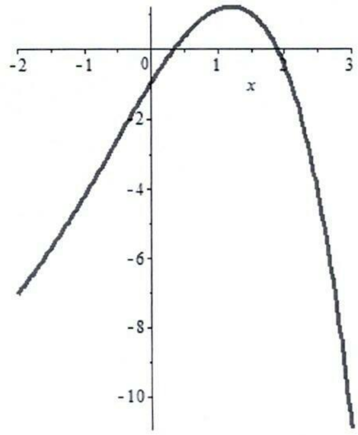
Command Window

```
>> Newtonfexptri
   0.500000000000000   0.500000000000000   6.000000000000000

   0.566311003197218   0.066311003197218   1.339563433220719

   0.567143165034862   0.000832161837644   1.003946186398632

   0.567143290409781   0.000000125374919   1.000000593976514

   0.567143290409784   0.000000000000003   1.000000000000014
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

Ejemplo 05: Hallar una raíz de $3x + sen(x) - e^x = 0$ Con una tolerancia de $1x10^{-6}$

Solución



$$f(x) = 0$$

$$3x + sen(x) - e^x = 0$$

x	0	1
$f(x)$	-1	0.2991

Entonces existe $c \in < 0,1 >$ tal que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ Donde:

$$f(x) = 3x + sen(x) - e^x$$

$$f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$$

i	x_i	x_{i+1}
0	0	
1		

4.3.3. CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$|g'(x)| \leq 1 \rightarrow \left| \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Deducción del criterio de la convergencia.

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad ....\textit{Método pto fijo}$$

$$|g'(x_n)| < 1 \quad ....\textit{Método pto fijo}$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \quad ....\textit{sustitución Newton}$$

Derivando.

$$g'(x_n)=\frac{f(x_n)f''(x)}{[f'(x_n)]^2}$$

$$|g'(x_n)|=\left|\frac{f(x_n)f''(x)}{[f'(x_n)]^2}\right|<1$$

4.3.4. MÉTODO DE LA SECANTE.

Sea f es continua en $[a,\ b]$, entonces existe una raíz en $[a,\ b]$ de la forma:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

Demostración.

Sabemos que:

$$m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots *_1$$

$$m=\frac{0-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots *_2$$

Igualando $*_1=*_2$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$x_2-x_1=\frac{-(x_1-x_0)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)} \rightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}=x_n-\frac{f(x_{n-1})(x_{n-1}-x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}$$

Ejemplo 06: Utilizando el método de la secante encontrar una raíz positiva. $\ln(x)-x+2=0$, para valores iniciales $x_0=3$, $x_1=3{,}15$ con tolerancia 10^{-4}

Solución.

Sea $f(x)=\ln(x)-x+2$

$$x_{n-1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = 3{,}15 - \frac{(\ln(3.15) - 3.15 + 2)(3.15 - 3)}{(\ln(3.15) - 3.15 + 2) - (\ln(3) - 3 + 2)}$$

$$x_2 = 3.146150255$$

$|x_2 - x_1| = |3.146150255 - 3.15| = 0.849745x10^{-3}$, como este valor es mayor que la tolerancia por lo tanto se continúa haciendo iteraciones.

$$x_3 = 3.146150255 - .....$$

4.3.5. MÉTODO DE NEWTON DE SEGUNDO ORDEN.

$$x_{n-1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{\left(f'(x_n)\right)^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

Demostración.

Por el polinomio de Taylor. Tenemos.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Para un polinomio de orden 1.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow (x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para un polinomio de orden 2.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Sea $(x - x_0) = \Delta x$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado

$$\Delta x = \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

Reemplazando

$$(x - x_0) = \Delta x$$

$$x - x_0 = \frac{-f'(x_0)}{f''(x_0)} \pm \frac{\sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \pm \frac{\sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

$\vdots$

$$x_{n-1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{\left(f'(x_n)\right)^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

Ejemplo 07: Utilizando el método de newton de segundo orden, encontrar una raíz positiva. $\ln(x) - x + 2 = 0$, para valores iniciales $x_0 = 3$, con tolerancia 10^{-4}

Solución.

$$f(x) = \ln(x) - x + 2 \to f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \to f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(3) = \ln(3) - 3 + 2 = \ln(3) - 1$$

$$f'(3) = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{3^2} = \frac{-1}{9}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{\left(f'(x_n)\right)^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{9}\right)} \pm \frac{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{9}\right)(\ln(3) - 1)}}{\left(-\frac{1}{9}\right)}$$

$$x_1 = 3.146138722$$

$$x_2 = 3.14613$$

4.3.6. RAÍCES DE POLINOMIOS

Dada la ecuación $P_n(x)=0$. Hallamos sus raíces aplicando el siguiente algoritmo.

$$x_{i+1}=x_i-\frac{P(x_i)}{P'(x_i)},\ con\ i=0\ldots n$$

Donde $P(x_i)$ y $P'(x_i)$, se hallan de la siguiente forma.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & & & & & & \downarrow (+) \\
x_i & & x_i b_{n-1} & x_i b_{n-2} & x_i b_{n-3} & \cdots & x_i b_2 & x_i b_1 \\ \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & P(x_i)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-3} & \cdots & b_1 \\
 & \downarrow & & & & & \downarrow (+) \\
x_i & & x_i c_{n-2} & x_i c_{n-3} & x_i c_{n-4} & \cdots & x_i c_1 \\ \hline
 & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & c_{n-5} & \cdots & P'(x_i)
\end{array}$$

Observación 01: Se parte de valores iniciales posibles.

Observación 02: Este proceso se repite en forma iterativa, y la aproximación al valor de la raíz buscada aumentara conforme se efectúen las iteraciones y valor inicial sea lo más correcto posible.

Ejemplo 08: Encontrar una raíz de la ecuación. $x^3+x^2-3x-3=0$ en $[1,\ 2]$, si existe una raíz. Con una tolerancia de $1x10^{-2}$

<u>Solución.</u>

Existe una raíz $r\in[1,\ 2]$ tal que $x_0=2$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 1 & -3 & -3 \\
 & \downarrow & & & \downarrow (+) \\
2 & & 2 & 6 & 6 \\ \hline
 & 1 & 3 & 3 & 3=P(x_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & 1 & 3 & 3 \\
 & \downarrow & & \downarrow (+) \\
2 & & 2 & 10 \\ \hline
 & 1 & 5 & 13\ =P'(x_0)
\end{array}$$

$$x_1=x_0-\frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

$$x_1=2-\frac{3}{13}$$

$$x_1=1.769230769$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -3 & -3 \\
 & \downarrow & & & \downarrow(+) \\
1.769230769 & & 1.769230769 & 4.899408282 & 3.360491577 \\
\hline
 & 1 & 2.769230769 & 1.899408282 & 0.360491577 = P(x_0) \\
 & \downarrow & & \downarrow(+) & \\
1.769230769 & & 1.769230769 & 8.029585796 & \\
\hline
 & 1 & 4.538461538 & 9.928994078 = P'(x_0) &
\end{array}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$$

$$x_2 = 1.769230769 - \frac{0.360491577}{9.928994078}$$

$$x_2 = 1.7329238103$$

$$x_3 =$$

$$\vdots$$

$$x_n =$$

Regla para hallar el intervalo donde se encuentran las raíces de una ecuación polinómica.

Sea $P(x)=0$, donde $P(x)$ tiene raíces reales y $P(x)$ es continua en $[a,\ b]$, el cual al ser evaluado en sus extremos adopta valores numéricos diferentes de cero.

El número de raíces reales que acepte el polinomio dado en el intervalo $[a,\ b]$ es $N(a)-N(b)$ o dicha cantidad; disminuida en número par de asignación que se tenga, para aplicar este teorema, se basa en la llamada regla de (Bauclan Fourier).

Que consta en lo siguiente.

Dado el polinomio $P_n(x)=0$ de grado n a partir de este se establece la sucesión en base a las derivadas.

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=g_0(x) \\ P'(x)=g_1(x) \\ P''(x)=g_2(x) \\ \quad\vdots \\ P^k(x)=g_k(x) \end{array}\right\} \begin{pmatrix} Obtenidas\ a\ partir\ del\ polinomio \\ dado\ con sus\ respectivas \\ derivadas, hasta\ llegar\ aun\ valor \\ numérico\ cons\tan te \end{pmatrix}$$

Observación 3: $N(x)$ viene a ser la notación del número de signos para en determinado valor.

Ejemplo 09: en el siguiente polinomio analizar $P(x)=x^3-1.74x^2-2.52x+3.97$

Solución

$g_0(x) = x^3 - 1.74x^2 - 2.52x + 3.97$

$g_1(x) = 3x^2 - 3.48x - 2.52$

$g_2(x) = 6x - 3.48$

$g_3(x) = 6$

x	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$N(x)$	$N(a)-N(b)$
$<-\infty, 0>$	-	+	-	+	3 cambios de signo	(3-2)=1 una raíz
0	+	-	-	+	2cambios de signo	
$<0, +\infty>$	+	+	+	+	0 cambios de signo	(2-0)=2 raíces

En intervalo desde $<0, +\infty>$, existen dos raíces

En intervalo desde $<-\infty, 0>$, $\exists$ una raíz

Por tanto, Como el polinomio es de grado 3, el polinomio tiene 3 raíces

4.3.7. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Hallar una raíz de siete cifras de tolerancia de cierta ecuación $e^x - (x^2-1)(x^2-4) = 0$, con una tolerancia de 10^{-6} y ocho cifras significativas.
2. Utilizando el método de Newton de segundo orden analizar una raíz.
   $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141$
3. Encontrar una raíz aproximada de la ecuación $x - 2^{-x} = 0$ en $[0, 1]$.
4. Utilice el método del punto fijo para estimar la solución de las siguientes ecuaciones, con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.
   a) $\cos x - x = 0$
   b) $2sen\sqrt{x} - x = 0$, para $x_0 = 0.5$
   c) $x - e^{-x} = 0$
5. Use el método de Newton y Rapshon para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones. Con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-6}$.
   a) $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$
   b) $e^{-x} - 1 + \dfrac{x}{5} = 0$, para $x_0 = 5$

c) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$, con $x_0 = 0$.
d) $3x^2 - e^x = 0$
e) $x^2 + 10\cos x = 0$
f) $e^{-x} - \ln x = 0$

6. Emplee el algoritmo de bisección para determinar las soluciones de:

   a) $x - 2^{-x} = 0$, para $0 \le x \le 1$ con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.
   b) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$, para $1 \le x \le 2$ con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.
   c) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$, para $0 \le x \le 1$ con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.
   d) $x\,senx - 1 = 0$
   e) con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.

7. Use el método de la secante para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones, con una tolerancia de $\tau = 1x10^{-4}$.

   a) $e^{-x} + 4x^3 - 5 = 0$, para $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$
   b) $3x + senx - e^{-x} = 0$, para $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$

8. Encuentre la raíz positiva de $f(x) = x^4 - 8x^3 - 35x^2 + 450x - 1001$, utilizando el método de falsa posición con seis iteraciones.

9. Determine la raíz real más grande de $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$

   a) En forma gráfica.
   b) Método I.P.F. (cinco iteraciones con $x_0 = 3$)
   c) Método Newton y Raphson (cinco iteraciones con $x_0 = 3$ y $\varepsilon_a \le 0.0000001$)
   d) Método secante (cinco iteraciones con $x_0 = 3$ y $x_1 = 3.5$)
   e) Método de Newton de segundo $x_0 = 3$ $\varepsilon_a \le 0.000001$

V. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Chapra, C. (1988). Métodos Numéricos para Ingenieros, con aplicaciones en computadores personales. Ediciones McGraw Hill, México.

Young, C y et al. (2005). Applied Numerical Methods Using Matlab. Editorial Wiley Interscience, U.S.A.

IV. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Doczz . (07 de 09 de 2024). *Doczz.* Obtenido de https://doczz.es/doc/6145137/guia10.derivada

Espinoza. (07 de 09 de 2024). *Análisis II.* Obtenido de https://idoc.pub/documents/analisis-iiespinozapdf-vnd5gj02gwlx

ESPINOZA RAMOS, E. (2008). *ANÁLISIS MATEMÁTICO I.* LIMA: Editorial Servicios Graficos J.J.

Espinoza Ramos, E. (2022). *Análisis Matemático I - para estudiantes de ciencia e ingeniería.* Lima-Perú.

Larson, R., & Bruce H. Edwards. (2010). *Cálculo de una variable.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES,.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo de una Variable.* México: McGRAW-HILL.

library. (07 de 09 de 2020). *Derivada y Diferencial teoría*. Obtenido de https://1library.co/document/q5e1m53q-derivada-y-diferencial-teoria.html

Limites y Continuidad. (07 de 09 de 2024). Obtenido de https://vsip.info/limites-y-continuidad-10-pdf-free.html

Márquez, J. C. (07 de 09 de 2014). *Matemáticas.* Obtenido de https://idoc.pub/documents/modulo-clei-vi-matematicas-1430q3mvqg4j

Matematicasiesoja. (07 de 09 de 2024). Obtenido de https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/1253689968clculoinfinitesimalii.doc

Pino, A. (07 de 09 de 2020). *Calculos de Larson*. Obtenido de https://es.slideshare.net/PINO-ANDRES/calculos-de-larson-novena-edicion

Pinto, J. A. (07 de 09 de 2013). *Cálculo Direncial.* Obtenido de https://doczz.es/doc/1914304/apuntes-de-c%C3%A1lculo-diferencial.-prof.-jaime-a-pinto.

Roman, E. (20 de 12 de 2020). *Calculo Diferencial e Integral de una Variable*. Obtenido de https://www.coursehero.com/file/78168751/Gu%C3%ADa-Aprendizaje-E-Roman-CUV-S10pdf/

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable.* México: Cengage Learning Editores.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo de Una Variable.* México: Pearson Education,.

Videla, D. (07 de 09 de 2024). *Edoc.* Obtenido de https://edoc.pub/calculo-de-una-variable-conceptos-y-contextos-pdf-free.html

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

COMISIÓN ORGANIZADORA

VICEPRESIDENCIA ACADÉMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE JAÉN

SEPARATA DE DERIVADAS CON ENFOQUE INGENIERIL

Autores:

Mg. Enny Román Castillo

Mg. Frans Fuentes Maza

JAÉN, SETIEMBRE DEL 2024

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

Las derivadas surgieron en el siglo XVIII, aunque de manera algo confusa, como resultado de las investigaciones de las velocidades por parte del científico inglés Isaac Newton y el análisis de tangentes a curvas realizado por el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (Roman, 2020).

En consecuencia, las derivadas proporcionan información resumida y probada a los usuarios, permitiéndoles interpretar y ofrecer datos sobre diversos aspectos de nuestra existencia. Su aplicación abarca desde el vuelo de un avión y el movimiento de un coche hasta la construcción y otros ámbitos cotidianos. Asimismo, las derivadas son cruciales para medir la rapidez del cambio en fenómenos como la temperatura, el crecimiento o decrecimiento de la producción económica, siendo de gran importancia en la ingeniería.

Invitamos a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Jaén a revisar este material académico, pues será muy útil en su formación profesional de pregrado.

Atte. Los autores

II. CONTENIDO TEMÁTICO

- **La función derivada.**
- **Interpretación geométrica.**
- **Definición formal de la derivada**
- **Cálculo de la derivada de una función por definición.**
- **Derivación de funciones algebraicas.**
- **Regla de la cadena**
- **Derivación de funciones trigonométricas**
- **Derivación implícita.**
- **Aplicación de la derivada**
- **Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.**
- **Estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos.**
- **Estudio de la curvatura de una curva y puntos de inflexión.**
- **Resolución de problemas de optimización.**
- **Regla de L´hôpital, para el cálculo de límites**
- **Teoremas de Rolle, teorema del valor medio y sus aplicaciones**
- **Velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo.**
- **Relación entre rapidez de variación de variables relacionada.**

III. DERIVADAS

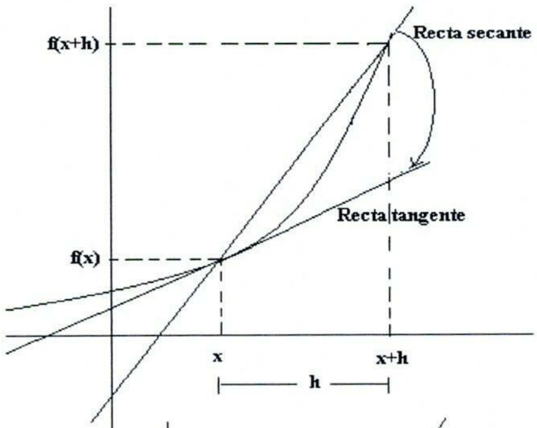
3.1. DERIVADA DE UNA FUNCION

3.1.1. PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE

Definición:

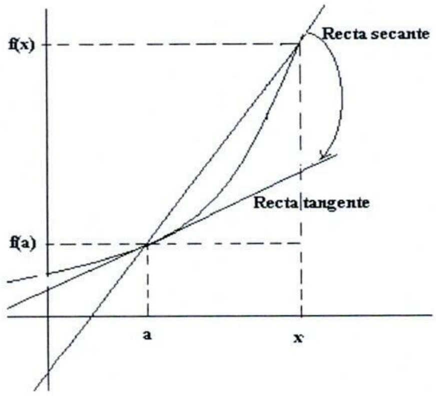
La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\,(x, f(x))$ es (Doczz , 2024):

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$



OTRA DEFINICIÓN

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es (Doczz , 2024): $\boxed{m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$



Ejemplo 01: Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4,2) (Doczz , 2024).

Solución

Hallando la pendiente de la recta tangente usando límites:

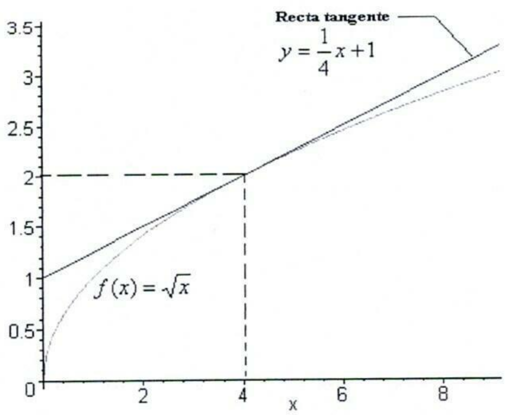
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$



Seguido se encuentra la ecuación de la recta con la expresión: $\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$ (Pinto, 2013)

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$ (Pinto, 2013).

Por lo tanto, la ecuación será: $y = \frac{1}{4}x + 1$

3.1.2. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

Sea $f(x)$ una función real de variable real, si $x \in D_f$ La pendiente de la recta tangente (m) en un punto particular se llama derivada de f en ese punto y se representa como.:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ = Derivada de f en el punto $(x,\ f(x))$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Se da cuando existe el límite.

El proceso de encontrar la derivada se llama **"diferenciación"**

Notación

Sea $y = f(x)$ una función, notamos la derivada así:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = f_x$$

En un punto particular $(a,\ f(a))$ escribimos: $f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

Ejemplo 02: Halle la derivada de $y = x^2$ en $x = 2$ (Pinto, 2013).

solución

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

$$Entonces: \quad y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Evaluando $x = 2$ la derivada es: $y' = 2x \rightarrow y'(2) = 2(2) = 4$.

Ejemplo 03: Halle la derivada de $y = x^3$.

Solución

$$y' = \frac{d}{dx}(x^3) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$ (Doczz , 2024)

$$Entonces: \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Ejemplo 04. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$.

En los puntos de abscisa: -2,-1,0,1,2,3,4 (Limites y Continuidad, 2024).

Solución

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$=2x-2$$

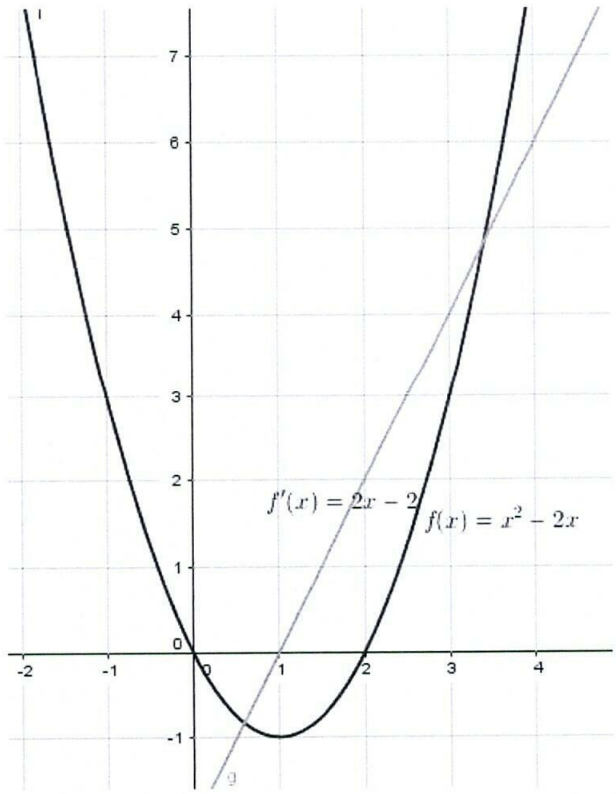
Para la función $f(x)=x^2-2x$, su derivada $f'(x)=2x-2$ en los puntos dados valen:

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Los puntos de la tabla anterior: (-2,-6); (-1,-4); ....;(4,6). Corresponden todos a la gráfica de la recta de ecuación: $y=2x-2$ (Márquez, 2014).

para la comprobación se debe de obtener la expresión de la derivada de f en un punto cualquiera x mediante el cálculo del límite que ya conocemos. (Matematicasiesoja, 2024)

x	f(x)	f'(x)
-6	48,0000	-14,0000
-5	35,0000	-12,0000
-4	24,0000	-10,0000
-3	15,0000	-8,0000
-2	8,0000	-6,0000
-1	3,0000	-4,0000
0	0	-2,0000
1	-1,0000	0
2	0	2,0000
3	3,0000	4,0000
4	8,0000	6,0000
5	15,0000	8,0000
6	24,0000	10,0000



3.1.3. DERIVADAS LATERALES.

Sea $f : R \to R$, una fusión y $a \in D_f$

Se confirma que la derivada de una función en un punto, $f'(a)$, se obtiene como un límite (Márquez, 2014).

Para que este límite exista, sabemos que han de existir los límites laterales correspondientes, que en este caso se les denomina **derivadas laterales** y se obtienen (Limites y Continuidad, 2024):

$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es la derivada por la izquierda de $f(x)$ en a

$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es la derivada por la derecha de $f(x)$ en a.

Si las derivadas laterales tienen el mismo valor, es decir, $f'(a^-) = f'(a^+)$ diremos que la función $f(x)$ **es derivable en** a y su valor es: $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$

Ejemplo 05: Sea la función $g(x) = x^2$. Calcula la derivada, si existe, en el punto $a = 1$ (Márquez, 2014).

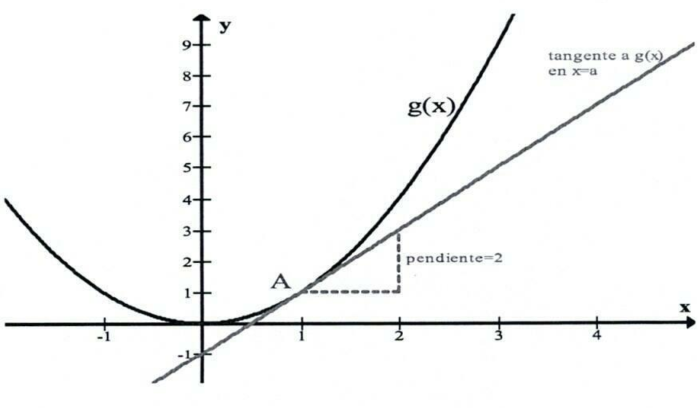
Solución

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2$$

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2$$

$$g'(1^-) = g'(1^+) = g'(1) = 2$$

La función $g(x) = x^2$ **es derivable en** $a = 1$ y su derivada vale: 2 (Márquez, 2014). Se sabe que es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de la abscisa $a = 1$ (Limites y Continuidad, 2024).



3.1.4. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él (Márquez, 2014). Acabamos de ver en el ejemplo anterior para $g(x)=x^2$, que **es continua en** $x=0$, sin embargo, **no es derivable en** $x=0$ (*en ese punto la recta tangente es perpendicular*) (Limites y Continuidad, 2024).

Ejemplo 06: Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 1 \\ x+2 & si \quad x>1 \end{cases}$

Analizar su continuidad y es derivable para x=1

Solución

i) Analizando la continuidad en $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=3$, por lo tanto, f es continua.

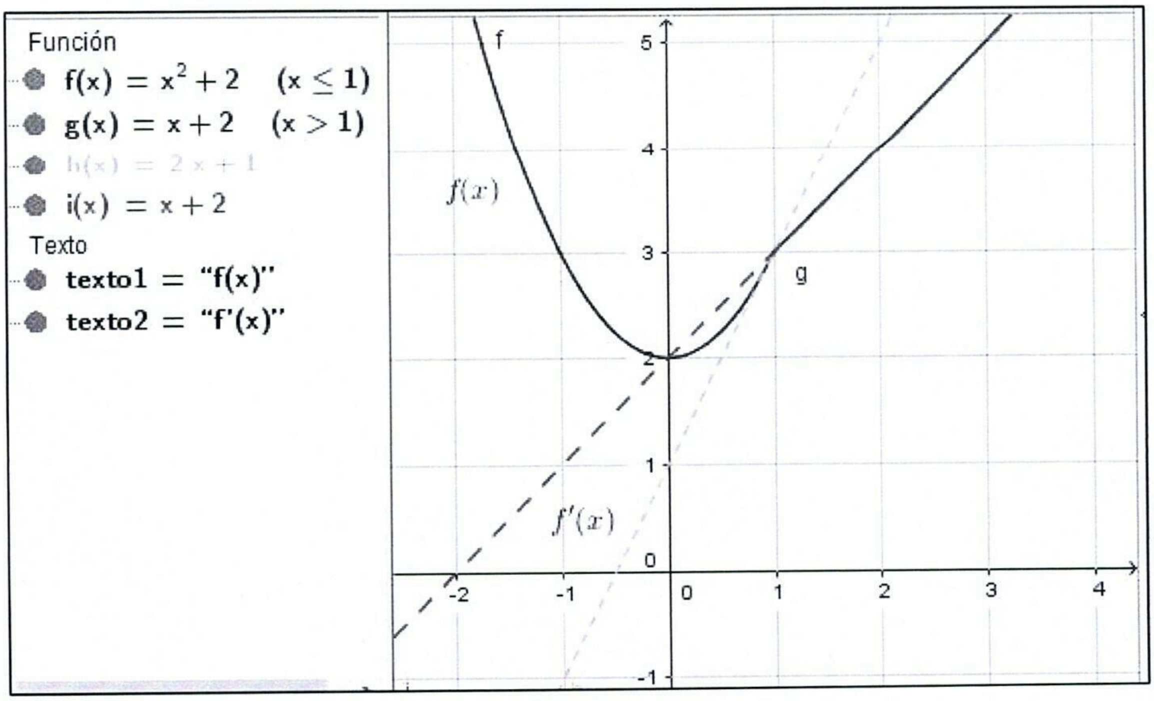
ii) Analizando si f es diferenciable en x=1

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[(1+h)^2+2]-[1^2+2]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[(1+h)+2]-[1+2]}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)$ entonces se cumple que no existe $f'(1)$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=1$.



Observación:

Si una función f es continua en a no necesariamente es diferenciable en a.

Si una función f es derivable en a necesariamente es continua en a.

Teorema 01:

Sea f una función y $x_0 \in D_f$. Si f es diferenciable en x_0 entonces f es continua en x_0 (Espinoza Ramos, 2022).

Generalización

Si usamos límites para hallar la derivada de $y = x^n$ obtenemos: $y' = n x^{n-1}$, es decir:

$$\text{Si } \boxed{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n\, x^{n-1}}$$

3.1.5. PROPIEDADES DE DERIVACIÓN

Sean *f*, *g* dos funciones entonces se cumple que

1. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
2. $\frac{d}{dx} k.f(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$
3. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = g(x)\frac{d}{dx} f(x) + f(x).\frac{d}{dx} g(x)$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx} f(x) - f(x)\frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}; \quad g(x) \neq 0$
5. **Si** $y = f(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$
6. **Si** $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
7. **Si** $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
8. **Si** $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)\ ;\ a > 0.\ a \neq 1$
9. **Si** $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
10. **Si** $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e,\ x > 0$

Ejemplo 07: Hallar la derivada de $f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^2 - 6)$

Solución

Aplicando la propiedad (4)

$$f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^2 - 6)$$
$$f'(x) = (x^3 - 2x^2)'(x^2 - 6) + (x^3 - 2x^2)(x^2 - 6)'$$
$$f'(x) = (3x^2 - 4x)(x^2 - 6) + (x^3 - 2x^2)(2x)$$
$$f'(x) = 3x^4 - 18x^2 - 4x^3 + 24x + 2x^4 - 4x^3$$
$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 24x$$

Ejemplo 08: Hallar la derivada en $f(x) = 140$.

Solución

Aplicando la propiedad 1 tenemos: $f'(x) = 0$, porque f es constante

ACTIVIDAD 01 DE REFORZAMIENTO

a) Determinar la derivada de las siguientes funciones aplicando límites.

a) $f(x) = 5x^2$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x) = sen(x)$

b) Encontrar $f'(x)$

a) $f(x) = 24 - 10x^2$

b) $f(x) = e^x - 2x^5 + 4x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \ln(x)$

d) $f(x) = -\dfrac{10}{x^5}$

e) $f(x) = x - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

f) $f(t) = t^4 - 2t^{-1} + \dfrac{3}{t^2}$

g) $f(x) = (x^3 - 2x)(x^5 + 6x^2)$

h) $f(x) = (\dfrac{x+3}{2})(x^2 - 4x + 9)$

i) $f(x) = \dfrac{3x^5}{x^2 - 2x + 1}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{4x^5 - 3x^2 + 1}$

c) Encuentre ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en el punto dado, y Utilice una herramienta matemática para graficar f y f' (Videla, 2024).

a) $f(x) = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

b) $f(x) = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

c) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

d) $f(x) = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

d) La ecuación de movimiento de una partícula es $s(t)=t^3-3t$, donde s está en metros y t está en segundos. Encuentre

(a) **La grafica de movimiento de la partícula.**

(b) **La velocidad y aceleración como funciones de t (Videla, 2024),**

(c) **La aceleración después de 2 s, y**

(d) **La aceleración cuando la velocidad es 0 (Videla, 2024).**

e) Si en un cilindro se mantiene gas a una temperatura constante T, la presión P está relacionada con el volumen V mediante una fórmula de la forma $P=\dfrac{nRT3}{V-nb}-\dfrac{an^2}{V^2}$, en la que $a,\ b,\ n\ y\ R$ son constantes. Determine $\dfrac{dP}{dV}$

3.2. DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

3.2.1. REGLA DE LA CADENA

Si $f(u)$ es derivable en $u=g(x)$ y $g(x)$ derivable en x, entonces la compuesta $(f\circ g)_{(x)}=f(g(x))$ es derivable en x. Además:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Usando la notación de Leibniz, si $y=f(u)$, $u=g(x)$

entonces: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

Función exterior

$$y=f(g(x))=f(u)$$

Función interior

REGLA DE LA CADENA PARA POTENCIAS

Si $u(x)$ es una función derivable entonces: $\boxed{\dfrac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}}$

A si mismo tenemos si: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}$, se cumple que:

1. Si $f(x)=e^{u(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{u(x)}u'(x)$
2. Si $f(x)=a^{u(x)},a>0,a\neq 1\Rightarrow f'(x)=a^{u(x)}u'(x)\ln(a)$

Ejemplo 01: Sea $y=(3x^2-x+1)^4$ halle su derivada

solución

$y'=4(3x^2-x+1)^3(6x-1)$

Ejemplo 02: Sea $y=\sqrt{x^3+x}$ calcule $\dfrac{dy}{dx}$

Solución

$$y=\sqrt{x^3+x}=(x^3+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y=(x^3+x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^3+x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+1)=\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$$

Ejemplo 03: Sea $y=4^{x^3+e^x}$ calcule $\frac{dy}{dx}$

Solución

$$y=4^{x^3+e^x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=4^{x^3+e^x}\frac{dy}{dx}(x^3+e^x)\ln(4) \rightarrow y'=\ln(4)(3x^2+e^x)4^{x^3+e^x}$$

3.2.2. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

f) Derivada de la función seno de *x*

$$\frac{d}{dx}[sen(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h)-1)+sen(h)\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)\cos(x)}{h}=$$

$$sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=sen(x)(0)+\cos(x)(1)=\cos(x)$$

g) Derivada de la función coseno de *x*

$$\frac{d}{dx}[\cos(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-sen(h)sen(x)-\cos(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h)-1)-sen(h)sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h)-1}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)sen(x)}{h}=$$

$$\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=\cos(x)(0)-sen(x)(1)=-sen(x)$$

Para calcular las derivadas adicionales, no es necesario utilizar límites, ya que se pueden emplear las identidades trigonométricas relacionadas con el seno y el coseno.

h) Derivada de la función tangente de *x*

$$\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right]=\frac{\cos(x)\cos(x)-(-sen(x))sen(x)}{(\cos(x))^2}=\frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{(\cos(x))^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$$

El lector puede usar este mismo procedimiento para probar las siguientes derivadas:

$$\frac{d}{dx}\cot(x)=-\csc^2(x) \qquad \frac{d}{dx}\sec(x)=\sec(x)\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}\csc(x)=-\csc(x)\cot(x)$$

(Pinto, 2013)

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPUESTAS

Si $u(x)$ *una funcion de x* entonces sus derivadas son:

1. Si $f(x) = sen(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x).\cos(u(x))$
2. Si $f(x) = \cos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -u'(x).sen(u(x))$
3. Si $f(x) = tg(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x).\sec^2(u(x))$
4. Si $f(x) = ctg(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -u'(x).\csc^2(u(x))$
5. Si $f(x) = \sec(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x).\sec(u(x))tg(u(x))$
6. Si $f(x) = \csc(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -u'(x).\csc(u(x))ctg(u(x))$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las fórmulas de derivación de las seis funciones trigonométricas inversas son:

1. Si $f(x) = arc\ \mathrm{Sen}\ u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$
2. Si

$$f(x) = arc\ tg\ u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

3. Si

$$f(x) = arc\ \cos\ u(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$$

$$f(x) = arc\ ctg\ u(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

4. Si

$$f(x) = arc\ ctg\ u(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

5. Si

$$f(x) = arc\ \sec\ u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

6. Si

$$f(x) = arc\ \csc u(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

Ejemplo 04: Calcular la derivada de $y = sen(x^2)$

Solución

$$y' = \cos(x^2)\,2x = 2x\cos(x^2)$$

Ejemplo 05: Calcular la derivada de $y = arcsen(\ln x)$

Solución

$$y = a\,rcsen(\ln x) \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$\rightarrow y' = \frac{x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

3.2.3. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $E(x,y)=0$, se calcula derivando término a término (Espinoza Ramos, 2022), considerando a $y=f(x)$ como función de x, y de esta despejamos $y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)$

Una forma más practica para calcular $y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)$ de la ecuación $E(x,y)=0$ es aplicado la formula

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}}$$

Ejemplo 06: Hallar la derivada de $y^2 = x$

Solución

Se define dos funciones implícitamente, ellas son: $y=f(x)=\sqrt{x}$. $y=f(x)=-\sqrt{x}$

Para hallar $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ debemos derivar implícitamente la ecuación $y^2 = x$, en primer lugar, vamos a sustituir y por $f(x)$ en la ecuación, así:

1.- $[f(x)]^2 = x$, ahora derivamos en ambos miembros con respecto a x, y usamos la regla de la cadena en el miembro izquierdo

2.- $f(x)f'(x)=1 \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2y}$

Entonces $y' = \frac{1}{2y}$

Ejemplo 07 $y^3 + 7y = x^3$ define a *y* como una función implícita de *x*, halle $\frac{dy}{dx}$

Solución

Derivando en ambos miembros:

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(3y^2+7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{3y^2+7} \rightarrow y'=\frac{3x^2}{3y^2+7}$$

ACTIVIDAD 02 DE REFORZAMIENTO

i) Hallar las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $f(x)=(6x-2)\sqrt{x^2-5x+3}$

(b) $f(x)=\dfrac{e^{x^2+1}}{ln(x+1)}$

(c) $f(x)=\sqrt{(x-1)^5(6x-5)}$

(d) $f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{5x-1}\right)^2}$

(e) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(1-x^3)^5 . x^3}{(9-2x^2)}}$

(f) $y=\sqrt[9]{\cot(8-3x)}$

(g) $y=\cot x^3 \sec 5x$

(h) $y=x^7\cot(4x-9)$

(i) $y=\cos^3 6x$

(j) $y=\tan^5 x^7$

(k) $f(x)=e^x.lnx$

(l) $f(x)=e^{2x}.lnx$

(m) $y=arc\cot\left(\dfrac{2}{5x^7-x}\right)$

(n) $y=arc\sec(5x^3-x)$

(o) $y=arc\,sen^7 2x$

(p) $y=arc\tan(3x^2-11x+5)$

j) Movimiento armónico. El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es (Pino, 2020): $y=\dfrac{1}{3}\cos 12t-\dfrac{1}{4}sen12t$**, donde** y **se mide en pies y** t **en segundos.**

Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t=\dfrac{\pi}{8}$

k) Movimiento ondulatorio. Una boya experimenta un movimiento armónico simple, descrito por $y=A\cos(\omega t)$**, mientras las olas la atraviesan. La boya se desplaza verticalmente desde el punto más bajo hasta el más alto, recorriendo una distancia total de 1,067 m. Cada 10 segundos vuelve a su punto de máxima altura (Pino, 2020).**

a) Escribir una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t=0$**,**

b) Calcular la velocidad de la boya en función de t (Pino, 2020).

3.3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $y = f(x)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable en x entonces:

$\exists\ f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ entonces: $y'=f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ es la primera derivada o derivada de primer orden

Que al derivarse queda expresada como otra función de la forma siguiente.

$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ entonces: $y''=f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ que ha esta función le llamaremos segunda derivada o derivada de segundo orden y si volvemos a derivar se obtiene otra función.

$f'''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$ entonces: $y'''=f'''(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ y lo llamaremos tercera derivada o derivada tercer orden y así sucesivamente.

La derivada de la función $f^{(n)}(x)$ es $f^{(n)}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$ entonces:

$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ es la enésima derivada o derivada de orden *n* (Pinto, 2013).

Ejemplo 01: Halle todas las derivadas de orden superior para (Pinto, 2013) $y=3x^4+2x^3+x^2-2$

Solución

Hallando sus derivadas de $y=3x^4+2x^3+x^2-2$

$$y'=12x^3+6x^2+2x$$
$$y''=36x^2+12x+2$$
$$y'''=72x+12$$
$$y^{iv}=72$$
$$y^{v}=0$$
$$\vdots$$
$$y^{n}=0$$

Ejemplo 02: Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

Solución

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x+1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Por lo tanto $f^{n}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$

Ejemplo 03: Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2-4}$

Solución

$$f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}\rightarrow f(x)=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

$$f'(x)=-2\frac{1}{(x-2)^2}-3\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=2\frac{1\cdot 2}{(x-2)^3}+3\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3}$$

$$f'''(x)=-2\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^4}-3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+2)^4}$$

$$f^{iv}(x)=2\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x-2)^5}+3\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+2)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x)=2\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x-2)^{n+1}}+3\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x+2)^{n+1}}$$

Por lo tanto $f^{n}(x)=2\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}+3\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$

Ejemplo 04: Demostrar que la función $y=Ax^n+Bx^{1-n}$, satisface la ecuación diferencial: $n(n-1)y-x^2y''=0$

Solución

$y = Ax^n + Bx^{1-n}$

Derivando

$$y' = nAx^{n-1} + (1-n)Bx^{-n}$$

$$y'' = n(n-1)Ax^{n-2} + (1-n)(-n)Bx^{-n-1}$$

$$x^2y'' = n(n-1)Ax^n + (n-1)(n)Bx^{1-n} \ ....(1)$$

$$n(n-1)y = n(n-1)Ax^n + n(n-1)Bx^{1-n} \ .....(2)$$

Restando (1)-(2)

Se obtiene: $n(n-1)y - x^2y'' = 0$

3.4. DERIVADAS DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

3.4.1. REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICAS

Las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva pueden ser funciones de una variable t llamado parámetro, es decir (Espinoza Ramos, 2022):

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \cdots (\alpha)$$

, son las ecuaciones paramétricas.

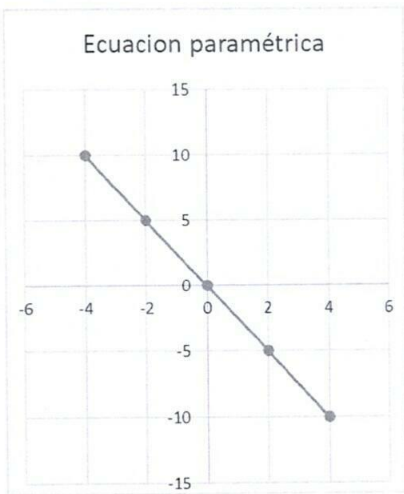
A la ecuación (α) se le denomina ecuación paramétrica donde el valor de t le corresponde un punto (Espinoza Ramos, 2022) $P(f(t), g(t))$ del plano XY.

Ejemplo 05: Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

a) $x = 2t, \quad y = -5t$

solución

t	x	y
-2	-4	10
-1	-2	5
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10

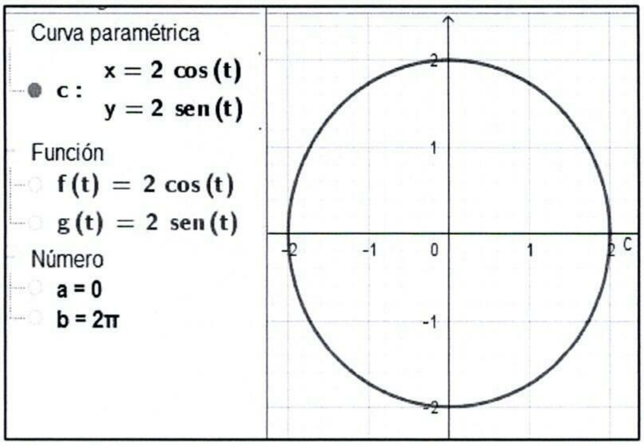


b) $x = 2\cos\theta, \quad y = 2sen\theta$

t	x	y
0	2	0

$\pi/4$	1.41	1.41
$\pi/2$	0	2
$3\pi/4$	-1.41	1.41
π	-2	0
$3\pi/2$	0	-2
2π	2	0

Solución



3.4.2. DERIVADAS DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Consideremos dos funciones f y g derivables en un intervalo $[a, b]$, tal que:

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, son las ecuaciones paramétricas (Espinoza, 2024).

La $\dfrac{dy}{dx}$ donde x y y están dados en forma paramétrica, se obtiene aplicando la regla de la cadena, es decir (Espinoza, 2024):

Si

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = g'(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \quad f'(t) \neq 0$$

Donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \qquad f'(t) \neq 0$$

Para obtener la segunda derivada, se aplica nuevamente la regla de la cadena, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{\left(f'(t)\right)^3}; \qquad f'(t) \neq 0$$

Ejemplo 03: Calcular $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\pi/2}$ en $\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\,sent}{a(1-\cos t)} = \frac{sent}{1-\cos t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\pi/2} = \frac{sen(\pi/2)}{1-\cos(\pi/2)} = \frac{1}{1-0} = 1$$

De modo que $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\pi/2} = 1$

ACTIVIDAD 03 DE REFORZAMIENTO

l) Hallar las derivadas y evalúe en de $f^{n}(x)$ las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(x+a)$

b) $f(x) = \ln(x)$

c) $f(x) = e^{ax}$

d) $f(x) = sen(x)$

e) $f(x) = (ax+b)^{n}$

f) $f(x) = x e^{x}$

g) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{x^{2}-1}$

i) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^{2}+x-12}$

m) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $x^{3}+y^{2}+2x-6=0$, en el punto cuya coordenada es y=3.

n) Si $f(x) = a\,sen3x - b\cos 3x$,. Hallar los valores de a y b tal que se cumple la igualdad: $f''(x)+4f'(x)+3f(x) = 10\cos 3x$

o) Trazar las la gráfica de las ecuaciones paramétricas pasando a coordenadas cartesianas y Utilice una herramienta matemática para su gráfico.

a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = 2+2sen\,\theta \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a\cos^{3} t \\ y = a\,sen^{3} t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = t^{2}-1 \\ y = 4t-t^{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = \dfrac{a\,t}{1+t^{3}} \\ y = \dfrac{a\,t^{2}}{1+t^{3}} \end{cases}$

p) Utilice una herramienta matemática para trazar la gráfica de las funciones en forma paramétrica y calcule $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$

a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t\,sent) \\ y = a\,(sent - t\cos t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a\,(t - sent) \\ y = a\,(1 - t\cos t) \end{cases} \Rightarrow para\ t = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\begin{cases} x = t^{2}-t \\ y = t^{3}+1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,sen^3 t \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow para\ t = 0$

q) Encontrar las ecuaciones de la tangente y normal de la curva $x = t^2 + 1$**,** $y = t^3 + 2t$**, para** $t = -2$

r) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}$; $y = -\frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$ **en el punto** $(2,2)$ **(Espinoza Ramos, 2022).**

s) Hallar la n- ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{6}{(x-3)^2(x+1)}$

t) Refrigeración. La temperatura T **en grados Fahrenheit de los alimentos colocados en un congelador es (Larson & Bruce H. Edwards, Cálculo de una variable, 2010)**

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

Donde t es el tiempo en horas. Calcular la razón de cambio de T en Celsius con respecto a t en cada uno de los siguientes tiempos (Larson & Bruce H. Edwards, Cálculo de una variable, 2010):

$a)\, t = 1$, $b)\, t = 3$, $c)\, t = 5$ y $d)\, t = 10$

3.5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Las aplicaciones de la derivada de una función son numerosas. En este apartado nos limitaremos a ver las siguientes (Limites y Continuidad, 2024):

Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos, estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos, estudio de la curvatura de una curva y puntos de inflexión, resolución de problemas de optimización, regla de L´hôpital, para el cálculo de límites, teoremas de Rolle, teorema del valor medio y sus aplicaciones y velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo (Limites y Continuidad, 2024).

3.5.1. OBTENCIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

La ecuación de una recta que tiene de pendiente m y pasa por el punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ es $y = y_0 + m(x - x_0)$

La recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ tiene por pendiente en ese punto, según sabemos, $m = f'(x_0)$ y por tanto su ecuación es (Limites y Continuidad, 2024):

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo 01: Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas (Limites y Continuidad, 2024).

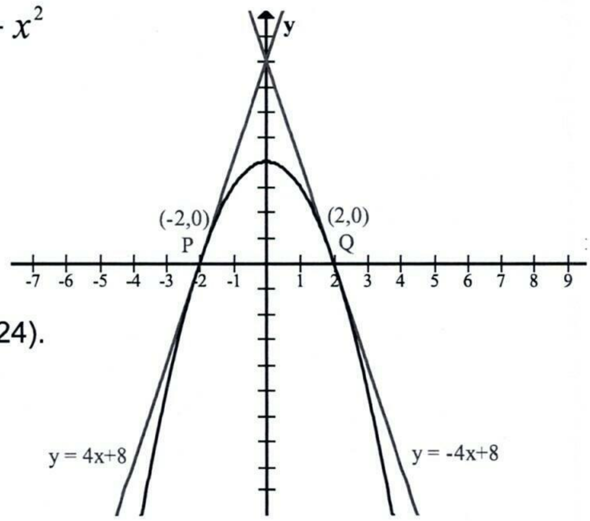
Solución.

Hallando Los puntos de corte de la función $f(x) = 4 - x^2$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son:

$Q(2.0)$ $P(-2.0)$



Calculando la derivada de la función

$f'(x) = -2x$. Sabemos que (Limites y Continuidad, 2024).

La pendiente de la recta tangente en esos puntos es

$m_1 = f'(2) = -4$ y $m_2 = f'(-2) = 4$

Las rectas tangentes en los puntos.

$Q(2,0)$ y $P(-2,0)$ son, por tanto (Márquez, 2014):

$$y = 0 - 4(x - 2) = -4x + 8; \quad y = 0 + 4(x - (-2)) = 4x + 8$$

3.5.2. ESTUDIO DE LA MONOTONÍA DE UNA CURVA Y OBTENCIÓN DE SUS EXTREMOS.

a) Crecimiento y Decrecimiento de una función en un punto (Márquez, 2014).

$f(x)$ derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Criterio que nos permite relacionar la monotonía de una función en un punto con el signo que toma su derivada en dicho punto (Márquez, 2014).

$$\text{Sea } f(x) \text{ una función derivable en } x_0 \rightarrow \begin{cases} f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x_0 \end{cases}$$

b) Máximos y mínimos relativos de una función.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\ tiene\ en\ x_0 \\ un\ Máximo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ a\ tal\ que \\ si\ x\in(x_0-a,x_0+a) \Rightarrow f(x)<f(x_0) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\ tiene\ en\ x_0 \\ un\ Mínimo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ a\ tal\ que \\ si\ x\in(x_0-a,x_0+a) \Rightarrow f(x)>f(x_0) \end{array}\right\}$$

Condición necesaria de extremo relativo.

$$Si\ f(x)\ tiene\ máximo\ o\ mínimo\ relativo\ en\ \ x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$$

(**esta condición es necesaria pero no suficiente). Definimos puntos singulares o puntos críticos de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula: $f'(x)=0$ (tangente horizontal) (Márquez, 2014).

Los puntos críticos pueden ser: máximos, mínimos o puntos de inflexión (Márquez, 2014). La regla para identificar los extremos relativos de una función se basa en observar el signo de su primera derivada cerca de un punto específico (Márquez, 2014). Un punto crítico es:

$$\begin{array}{lll} Máximo & f'>0\ a\ su\ izquierda & f'<0\ a\ su\ derecha \\ mínimo & f'<0\ a\ su\ izquierda & f'>0\ a\ su\ derecha \\ Inflexión & \multicolumn{2}{l}{f'\ tiene\ el\ mismo\ signo\ a\ ambos\ lados\ del\ punto} \end{array}$$

Ejemplo 02: Sea la función $f(x)=x^2-3x+2$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos y mínimos (Márquez, 2014).

Solución.

Determinando los puntos críticos.

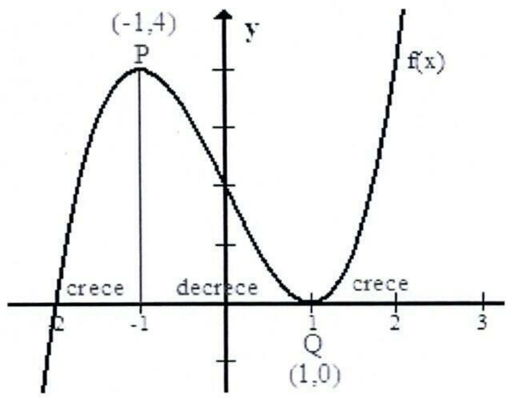
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0$$

Estudiamos pues el signo de la derivada

$$\Rightarrow x=\pm 1$$

$$\begin{array}{lll} en & (-\infty,-1) & f'>0 \Rightarrow f\ creciente \\ en & (-1,1) & f'<0 \Rightarrow f\ decreciente \\ en & (1,\infty) & f'>0 \Rightarrow f\ creciente \end{array}$$

Como la función en $x = -1$ pasa de creciente a decreciente, $f(x)$ tiene en $x = -1$ un Máximo relativo que vale: $(f(-1) = 4)$ (library, 2020).



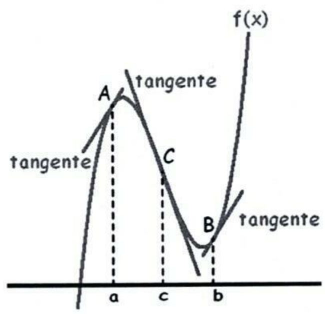
Como la función en $x = 1$ pasa de decreciente a creciente, $f(x)$ tiene en $x = 1$ un Mínimo relativo que vale: $(f(1) = 0)$ (library, 2020).

3.5.3. ESTUDIO DE LA CURVATURA Y LA OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN.

a) Concepto de curvatura de una curva en un punto.

Observa el gráfico de la curva $y = f(x)$ (Márquez, 2014).

Dada la recta tangente a la curva en el punto P, de ecuación: $y = t(x)$, puede ocurrir (Márquez, 2014):



- **Si en las proximidades de P es $t(x) < f(x)$ la curva es <u>cóncava</u> en P (en $P = B$)**
- **Si en las proximidades de P es $t(x) > f(x)$ la curva es <u>convexa</u> en P (en $P = A$) (Márquez, 2014).**

Si la tangente en P atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P se cumple: $t(x) > f(x)$ y a la derecha de P se cumple (Espinoza, 2024) $t(x) < f(x)$ (Márquez, 2014) (o viceversa) se dice que la curva $y = f(x)$ tiene en P un punto de Inflexión (en ejemplo $P = C$) (Márquez, 2014).

b) RELACIÓN DE LA CURVATURA CON EL VALOR DE LA SEGUNDA DERIVADA.

Si f tiene derivada segunda en x_0

f *cóncava en* $x_0 \Rightarrow f'$ *es creciente en* $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

f *convexa en* $x_0 \Rightarrow f'$ *es decreciente en* $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

f *tiene un punto de Inflexión en* $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

c) CRITERIO PARA DETERMINAR LA CURVATURA DE UNA CURVA.

$$
\begin{aligned}
&f \text{ y } f' \text{ derivables en } x_0\\
&Si \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es } \quad \text{cóncava en } x_0\\
&Si \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es } \quad \text{convexa en } x_0\\
&Si \quad \left.\begin{matrix} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } x_0 \text{ Inflexión}
\end{aligned}
$$

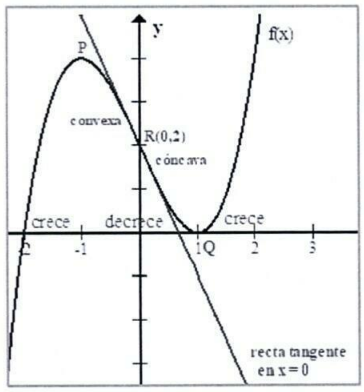
d) CRITERIO BASADO EN EL SIGNO DE LA DERIVADA SEGUNDA:

Para determinar los puntos extremos de la función (Limites y Continuidad, 2024).

$$
\begin{aligned}
&Si\, f'(x_0) = 0 \text{ y existe} f''(x_0)\\
&f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo en } x_0\\
&f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo en } x_0
\end{aligned}
$$

Ejemplo 03: Estudia la curvatura de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y puntos de inflexión (Márquez, 2014).

Solución



Hallando su derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Su segunda derivada es: $f''(x) = 6x$

Resolvemos los valores que anulan la derivada segunda, es decir, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$ (Limites y Continuidad, 2024).

$$
\begin{aligned}
&en \quad (-\infty, 0) \rightarrow f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ convexa}\\
&en \quad (0, +\infty) \rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ concava}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, en el punto de abscisa $x = 0$,(punto de inflexión $R\ (0,\ 2)$ (Márquez, 2014).

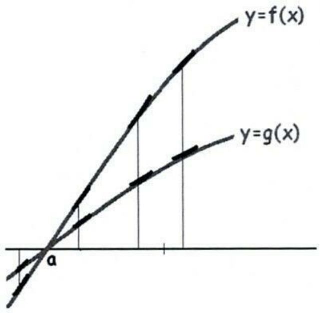
Vemos también en la gráfica como la recta tangente a la curva en el punto $R(0,2)$ atraviesa a la curva (Limites y Continuidad, 2024).

Ejemplo 04: Dada la función $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos y mínimos; analice su concavidad y punto de inflexión (Limites y Continuidad, 2024).

3.5.4. REGLA DE L´HÔPITAL, PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES.

Mira el gráfico del lado izquierdo.

- **Si existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$; significa que la relación entre las ordenadas de $y=f(x)$ y las de $y=g(x)$ tiende a estabilizarse (Limites y Continuidad, 2024).**



- **Si existe el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ significa que tiende a estabilizarse la relación entre sus pendientes (Limites y Continuidad, 2024).**
- **Si f y g son funciones derivables en un entorno $(a-r, a+r)$ de a (Márquez, 2014).**

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ y el límite $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ entonces también

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l}$$

Este procedimiento para calcular un límite de la forma (0/0) mediante el límite del cociente de sus derivadas se conoce como la regla de L'Hôpital. En ocasiones, después del primer paso, puede surgir otra indeterminación similar, lo que permite repetir el proceso.

Ejemplo 05.- Resuelve el siguiente límite $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

Solución

Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y cumple las condiciones de la regla d L`hôpital (Limites y Continuidad, 2024).

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+2x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{6x+4}{6x+2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 06: Resuelve el siguiente límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

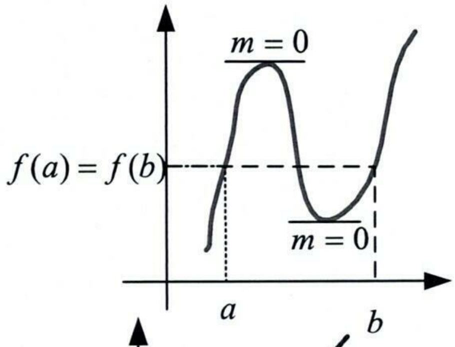
Ampliación de la regla de L´hôpital

Los límites del tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los que a es un número o $\pm\infty$

3.5.5. TEOREMA DE ROLLE, TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y APLICACIONES.

a) Teorema 2: (Teorema de Rolle)

Sea $f \in C[a,b]$ y es diferenciable en $< a,b >$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in < a,b > \; Tal\, que \; f'(c) = 0$



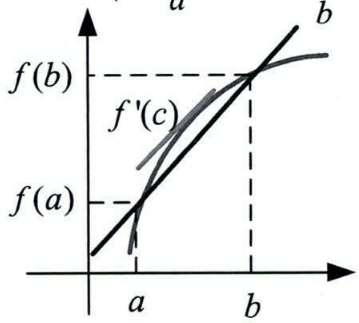
b) Teorema 3: (Teorema del Valor Medio)

Sea $f \in C[a,b]$ y es diferenciable en $< a,b >$

.

Entonces $\exists c \in < a,b > Tal\, que$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ejemplo 07: Hallar la raíz real de $3x^3 + 2x - 4 = 0$, en un intervalo de longitud menor $< 0,\ 4 >$, demuestre que existe una raíz única; $y = 3x^3 + 2x - 4$

Solución.

Primero: Hallando la raíz real.

$$\left.\begin{array}{l} Para: x = 0 \rightarrow f(0) = -4 \\ \quad\quad\;\; x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \end{array}\right\} me\, basta\, tomar < 0,1 >$$

Analizaremos en el intervalo [0, 1], $f \in C[0,1]$ y es diferenciable en $< 0,1 >$. Entonces $\exists c \in < 0,1 > Tal\, que$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ .... Por T.V.M

$$9c^2 + 2 = \frac{1 - (-4)}{1 - 0}$$

$$9c^2 = 3 \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow c = 0,58 \;\; Se\, escoge\, la\, positiva$$

Segundo: Demostración por el absurdo

Sea $c_1 < c_2, \exists c_1, c_2 \in < 0,1 > tal\, que\;\; f(c_1) = f(c_2) = 0$ ..... por el **teorema de Rolle**

Siempre que $f'(c) = 0$, entonces $f'(c) = 9c^2 + 2 = 0$

Siempre que:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \geq 0, \forall x \in R \\ Si\ p \rightarrow q \cong Si \sim q \rightarrow \sim p \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\begin{array}{c} 2 \geq 0 \\ 9c^2 \geq 0 \end{array}}{2+9c^2 \geq 0}$$

Por lo tanto $\exists c' \in <0.8, 0.99>\ tal\ que\ \ c' \in [0,1]$

3.5.6. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

Definición: Si $s = s(t)$ es la ecuación de la posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración del objeto en el instante t está dado por (Espinoza Ramos, 2022):

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ejemplo 08: Un globo está dado siendo inflado en tal forma que su volumen aumenta a razón de $5\ m^2 / \min$ ¿A qué rapidez aumentan el diámetro cuando éste tiene 12m? (Espinoza Ramos, 2022).

Solución

El globo esférico, Su volumen esta dado por: (V: Volumen del globo esférico)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$D = 12\ m \rightarrow D = 2r \quad \rightarrow r = 6$$

$$\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dt} = 5\ m^3 / \min$$

Como $V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

A hora reemplazando sus valores se tiene: $5 = 4\pi(6)^2 \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.011 m / \min$

(Limites y Continuidad, 2024).

Por lo tanto: $\frac{dD}{dt} = 2(0.011) m / \min = 0.022 m / \min$

3.5.7. RAPIDEZ DE CAMBIO

u) VELOCIDAD Y ACELERACIÓN INSTANTANEA

Sea $f(t)$ una función que describe el movimiento, llamada función posición del objeto y un intervalo de $t = a,\ t = b$, con $a < b$ (Espinoza Ramos, 2022), donde f camba de posición de $f(b) - f(a)$, la velocidad promedio o velocidad media ($\overline{V}$) está dada por:

$$\boxed{\overline{V} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

h : Es la longitud del intervalo $[a, b]$: $b-a=h$.

Se denomina, velocidad de una partícula en el instante t o velocidad instantánea en t, a:

$$\boxed{v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}}$$

Es decir, $v(t)$ es la derivada de f en t, $v(t)=f'(t)=\dfrac{df}{dt}$

Asumiendo que velocidad es una función $v=v(t)$, entonces la aceleración en el instante t está dada como la derivada de la función $v(t)$, es decir:

$$\boxed{a(t)=\frac{d(v(t))}{dt}=\frac{d^2(f(t))}{dt^2}}$$

v) RAZONES DE CAMBIO

Dada $y=f(x)$ si x cambia de x_1 a x_2 entonces el cambio en x se llama incremento de x: $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$

El correspondiente incremento de *y* es $\boxed{\Delta y = f(x_2)-f(x_1)}$ (Pinto, 2013)

El cociente de estos incrementos se llama ***Razón de cambio promedio*** de *y* con respecto a *x* (Pinto, 2013).

$$\textit{Razón de cambio promedio}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

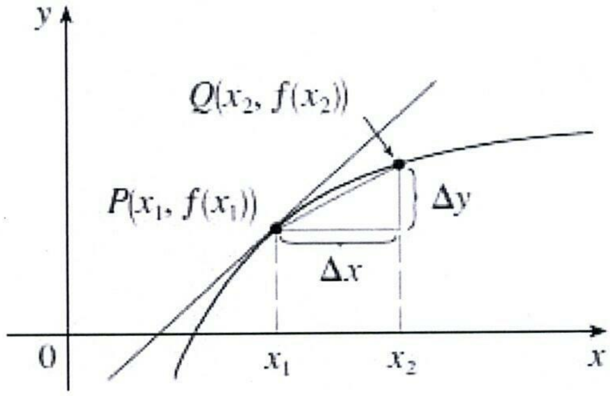
La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en el punto $(x_1, f(x_1)$ es (Pinto, 2013).:

$$\textit{Razón de cambio instantáneo}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

El promedio de rapidez de cambio puede ser interpretado como la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$

Usando notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



EN LA FÍSICA

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, entonces $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa el promedio de velocidad en un periodo Δt y $v = \frac{ds}{dt}$, representa la velocidad instantánea (Roman, 2020).

La rapidez instantánea de cambio de velocidad con respecto al tiempo es la aceleración:

$a(t) = v'(t) = s''(t)$ (Roman, 2020).

3.6. APLICACIONES DE LA DERIVADA EN LA INGENIERÍA

Ejemplo 01: ***Análisis del movimiento de una partícula***. La posición de una partícula está dada por la ecuación $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ Donde *t* se mide en segundos y *s* en metros (Márquez, 2014).

a) Determine la velocidad en el instante t

b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 segundos? ¿Y después de 4 segundos?,

c) ¿En qué momentos está la partícula en reposo?,

d) ¿En qué momentos está la partícula moviéndose hacia adelante (es decir, en la dirección positiva) ?,

e) Dibuje un diagrama que ilustre el movimiento de la partícula,

f) Calcule la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos,

g) Encuentre la aceleración en el tiempo *t* y después de 4 *s* (Videla, 2024).

h) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para, $0 \leq t \leq 5$ (Márquez, 2014).

Solución

a) La solución velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t - 9$$

b) La velocidad después de $2s$ significa la velocidad instantánea cuando $t = 2s$, es decir (Videla, 2024), $v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2^2) - 12(2) + 9 = -3\,m/s$

c) La velocidad después de $4s$:

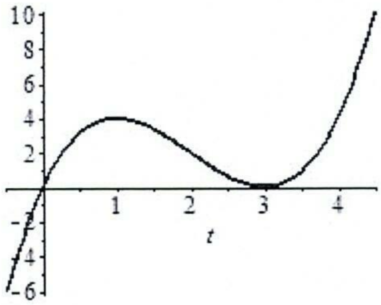
$$v(4) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3(4^2) - 12(4) + 9 = 9\,m/s$$

La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, o sea,

$$v(t) = 3(t^2) - 12(t) + 9 = 3(t-3)(t-1)$$

$$\Rightarrow t = 3;\ t = 1$$

La partícula está en reposo después de 1 y 3 segundos.



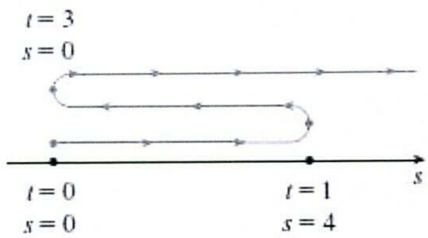
d) La partícula se mueve en la dirección positiva cuando $v(t) > 0$, esto es (Videla, 2024),

$$v(t) = 3(t^2) - 12(t) + 9 = 3(t-3)(t-1) > 0$$

Los factores son positivos cuando $t > 3$ o cuando ambos factores son negativos $t < 1$. Se mueven hacia atrás (en dirección negativa) cuando $1 < t < 3$ (Márquez, 2014).

e) Usando la información del inciso

Figura movimiento de la partícula, en una dirección y otra a lo largo de la recta (el eje s) (Videla, 2024).



f) Necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos [0, 1], [1, 3] y [3, 5] separadamente (Videla, 2024).

Para: [0, 1] , tenemos que: $|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4m$

Para: [1, 3] , tenemos que: $|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4m$

Para: [3, 5], tenemos que: $|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20m$

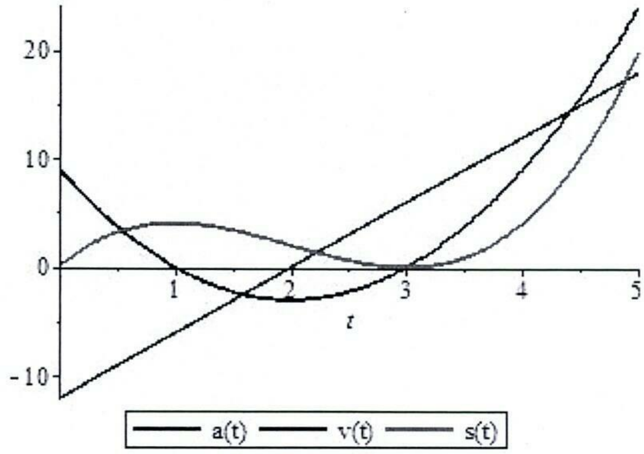
La distancia total es 4+ 4+ 20 = 28*m*

g) La aceleración es la derivada de la función de velocidad:

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=6t-12$$

$$a(t)=6(4)-12=12m/s^2$$

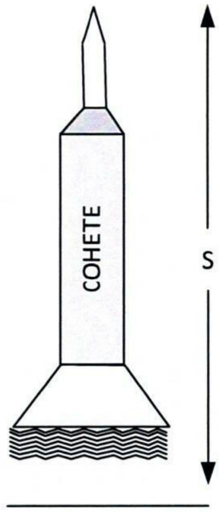
h) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para, $0\leq t\leq 5$



Ejemplo 02: Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a S sobre el suelo, t seg. Después de ser encendido. Donde $S=560t-16t^2$ y la dirección positiva hacia arriba (Roman, 2020). Encontrar:

a) **La velocidad del cohete 2seg. Después de haber sido encendido,**

b) **Cuánto tardará en alcanzar la altura máxima (m) (Roman, 2020).**



Solución

La ecuación $S=560t-16t^2$ representa el movimiento

La velocidad del cohete, t seg. Después de haber sido encendido será:

$v(t)=S'(t)$ (Espinoza Ramos, 2022),

Como $S(t)=560t-16t^2 \Rightarrow S'(t)=560-32t$

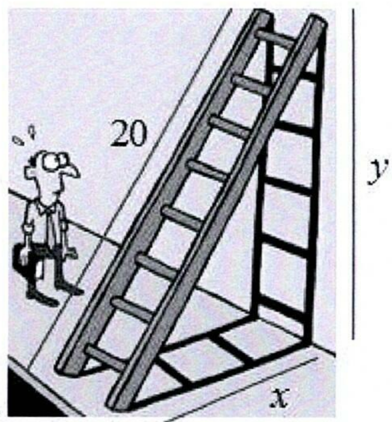
Por tanto $v(t)=560-32t$

a) $v(2)=560-64=496m/s$

b) **Como $v(t)=0$, es para que alcance su altura máxima crece.**

$0=560-16t \rightarrow t=17.5s$ (Espinoza Ramos, 2022).

Ejemplo 03:***(Rapidez de variación relacionadas):*** Una escalera de 20 m de largo, su base se desliza a razón de $2m/s$. Como se muestra en la **figura** ¿Con que rapidez resbala el otro extremo cuando está a 12m del suelo?



$$\frac{dx}{dt}=2m/s$$

Solución

Establecemos una relación entre y x y

$x^2+y^2=400$

Derivando con respecto t

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt}=-\frac{dy}{dt}\rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

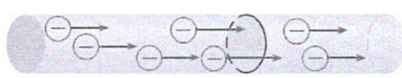
Como $y=12$ entonces $x^2+12^2=400\rightarrow x=16$

Reemplazando: $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{16}{12}(2m/s)\rightarrow\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{8}{3}m/s$

Observación:

Una corriente eléctrica es la derivada de la carga. Siempre que hay movimiento de cargas eléctricas, se genera una corriente. En la figura, se muestra una sección de un alambre con electrones moviéndose sobre una superficie plana sombreada en rojo.. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces el promedio de corriente durante este intervalo está definido como (Videla, 2024).

Promedio de corriente = $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\dfrac{Q_2-Q_1}{t_2-t_1}$

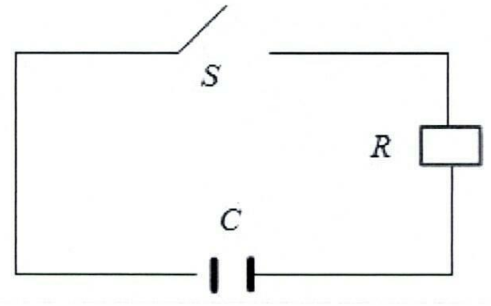


Si tomamos el límite de este promedio de corriente en intervalos cada vez más cortos, obtenemos lo que se llama corriente I en un tiempo determinado t_i (Videla, 2024).

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}$$

Entonces la corriente es la rapidez a la que fluye carga por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (Coulombs por segundo, llamados Amperes) (Videla, 2024).

Ejemplo 04: Considere el circuito mostrado en la figura, en el cual hay un condensador con una capacidad determinada que está cargado $C(Faradios)$ y tensión inicial de $V(Voltios)$ entre sus placas, se descarga sobre una resistencia $R(\Omega)$. Al cerrar la llave S comienza a circular una corriente de intensidad I dada por la expresión (Limites y Continuidad, 2024).



$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = RC\ cte\ de\ tiempo$, calcula la rapidez de variación de I en $t=0\ y\ t=\tau$ (Limites y Continuidad, 2024).

Solución

Dado $I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, se deduce que la rapidez está dada por: $\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Para $t=0$, tenemos que: $\frac{dI(0)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}\ (A/s)$

Para $t=\tau$, tenemos que: $\frac{dI(\tau)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}e^{-1}\ (A/s)$

Ejemplo 05

Suponga que un incendio forestal se expande en forma de círculo, y el radio de este círculo cambia a razón de 1.8 m/min. ¿Cuál es la tasa de crecimiento del área de la región afectada cuando el radio llega a los 50m?

Solución

Derivamos el área del círculo con respecto al tiempo para hallar la razón en la que está creciendo y propagándose el incendio.

$$A=\pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{d}{dt}[\pi r^2]$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi(50m)(1.8m/\min)$$

$$\frac{dA}{dt}=565.5m/\min$$

Por lo tanto, el área de propagación de la región incendiada con un radio de alcance $50\,m$ es de $565.5m/\min$.

Ejemplo 06

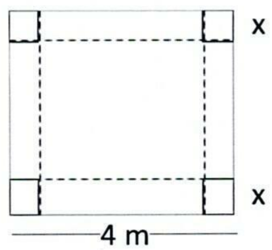
Se tiene una lámina de madera cuadrada de $4\,m$ de lado, si cortamos cuadrados iguales en las esquinas con el fin de construir una caja abierta para hacer un germinador de especies forestales, hallar las dimensiones de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo. Desprecie el espesor de la lámina.

Solución

$V = Base\,x\,Altura$

$V = (4-2x)(4-2x)\,x$

$V = 4x^3 - 16x^2 + 16x$



Primero: Hallamos los puntos críticos con la primera derivada

$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

$V'(x) = 12x^2 - 32x + 16$

Haciendo $V'(x) = 0$

$V'(x) = 12x^2 - 32x + 16 = 0$

$x = 2;\quad x = \dfrac{2}{3}$

Para que el volumen sea máximo asumimos $x = 2/3$

Segundo: Identificamos los intervalos

$\left\langle -\infty,\ \dfrac{2}{3}\right\rangle \left\langle \dfrac{2}{3},\ 2\right\rangle \left\langle 2,\ \infty\right\rangle$

Tomamos un número que esté dentro de los intervalos y reemplazamos en $V'(x)$

$0 \in \left\langle -\infty,\ \dfrac{2}{3}\right\rangle \to V'(0) = 16 \quad > 0 \uparrow$

$1 \in \left\langle \dfrac{2}{3}, 2\right\rangle \to V'(1) = -4 \quad < 0 \downarrow$ $\begin{cases} Máx \\ mín \end{cases}$

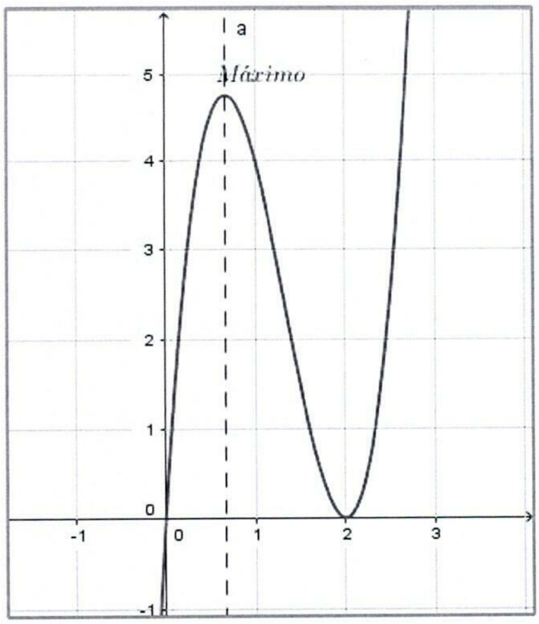
$3 \in \left\langle 2,\ \infty\right\rangle \to V'(3) = 28 \quad > 0 \uparrow$

Reemplazamos los puntos críticos en la función $V(x)$

$V(2/3) = 4.74$

$V(2) = 4(2)^3 - 16(2)^2 + 16(2) = 0$

Tercero: Grafica en si



Ejemplo 07

Un vivero forestal cuenta actualmente con 24 árboles de nogal (Juglans regia), y cada uno de estos árboles produce 600 frutos. Se estima que por cada árbol adicional que se plante, la producción de frutos por árbol disminuye en 15. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto semillero para que la producción sea máxima? ¿Cuál será la producción? (library, 2020).

Solución

Numero de árboles: 24

Número de frutos por árbol es: 600

Producción total actual de semillas es: $24(600) = 14400$

Sembrando árboles adicionales

Número de árboles: $24 + x$

Número de frutos por árbol: $600 - 15x$

Producción total de semillas es: $p(x) = (24 + x)(600 - 15x)$

$p(x) = 14400 + 240x - 15x^2$: modelo que representa la producción de semillas por cada árbol sembrado.

Determinamos los puntos críticos

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= -30x + 240 = 0 \\
-30x + 240 &= 0 \\
30x &= 240 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Determinando los intervalos donde la función es creciente o decreciente

$$
\left.\begin{array}{l}
0 \in \langle -\infty, 8 \rangle \rightarrow p'(0) = 240 > 0 \uparrow \\
10 \in \langle 8, \infty \rangle \rightarrow p'(10) = -60 < 0 \downarrow
\end{array}\right. \quad Máximo\}
$$

Para el sembrado de 8 árboles se tiene una producción máxima de 15360 semillas

ACTIVIDAD 04 DE REFORZAMIENTO

i) Determinar máximos y mínimos, puntos críticos, Analizar si es creciente o decreciente, puntos de inflexión (si fuera el caso) y Graficar en si en (Roman, 2020):

a) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 2$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $h(x) = sen^4 x - \cos^2 x$

f) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{4}{3}\, x\sqrt{3 - x}$

j) **Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determinar a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1, 2) (Espinoza Ramos, 2022).**

k) **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función. Hallar los valores de a, b, c, d tal que f tenga un punto de inflexión en $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{12}\right)$, y sea tangente a la recta $y = 3 - 2x$ en el punto $Q(0,3)$ (Roman, 2020).**

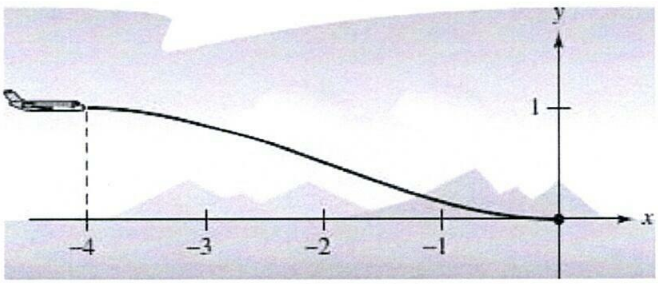
l) **Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a $s(t)$ sobre el suelo, t seg, después de ser encendido (Espinoza Ramos, 2022). Donde $s(t) = 576t - 16t^2$ y la dirección positiva hacia arriba. Encontrar:**

   a) **La velocidad del cohete en $x = t^2 + 1$, después de haber sido encendido.**

   b) **Cuánto tardará en alcanzar la altura máxima.**

m) **Potencia La fórmula para la salida de potencia P de una batería es $P = VI - RI^2$, donde V es la fuerza electromotriz en volts. R es la resistencia e I es la corriente. Determinar la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de P en una batería para la cual $V = 12$ volts y $R = 0.5$ ohms. Suponer que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo $0 \le I \le 15$. ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explicar.**

n) **Trayectoria de planeo de un avión: Un pequeño avión empieza su descenso desde la altura de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (Larson & Edwards, Cálculo de una Variable, 2010)**



   a) **Encontrar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el intervalo $[-4, 0]$ que describe una trayectoria de planeo uniforme para aterrizaje.**

   b) **La función del apartado a) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida? (Pino, 2020)**